Wintersemester 2008/09
Dr.Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

11. Übung
Kombinatorik

Präsenzübungen (für Freitag, 16.1.)

1. Sie haben als Ziffernvorrat 1,1,1,2,2,3 und sollen daraus dreistellige Zahlen bilden.
   a. Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf. Gehen Sie dabei systematisch vor.
   b. Lösen Sie a) mit einem Baumdiagramm.
   c. Erhöhen Sie den Ziffernvorrat auf 1,1,1,2,2,2,3,3,3. Wie viele dreistellige Zahlen gibt es nun? Sammeln Sie möglichst viele Lösungswege für diese Aufgabe und vergeben Sie einen (symbolischen) Preis für den elegantesten Lösungsweg.

2. In einer Fabrik werden 5 verschiedene Maschinenteile zur Gütekontrolle auf drei Kontrolleure A,B,C verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn A 1 Maschinenteil erhalten soll, B und C je 2 Maschinenteile? Schreiben Sie alle Verteilungen der Teile auf die drei Kontrolleure in einer Liste auf.

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 20.1.)

3. Eine andere Annäherung an die Permutationsregel.
   Wir nennen die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Dingen $P(n)$.
   Behauptung $P(n) = n!$
   Beweisen Sie die Behauptung durch vollständige Induktion.
   Beim Induktionsbeweis, also dem Schritt von n auf n+1, sollen Sie anschaulich erläuternd argumentieren. Hier sind Sie als zukünftige LehrerIn gefragt!

4. Polynomialformel
   a. Betrachten Sie $(a+b+c)^6$
      i. Wie oft kommt der Summand a^2b^4 vor?
      ii. Es kommt der Summand ab^2c^x vor. Bestimmen Sie $x \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Koeffizienten.
   b. Betrachten Sie $(a+b+c+d)^8$.
      i. Wie viele Summanden hat die Entwicklung?
      ii. Bestimmen Sie den Koeffizienten für $a^2b^2cd^3$.

5. Bahnkarten in Budapest
   Die abgebildeten Bahn- und Metrokarten stammen aus Budapest. Die linke Karte wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei werden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Auf der rechten Karte befindet sich gemäß der neuen

Entwertungsmethode ein Stempel, der das Datum und die Uhrzeit enthält.
Zu dieser Änderung ist es gekommen, da der ungarische Mathematiker Ödön Vancso die Verwaltung des örtlichen Nahverkehrs darauf hingewiesen hat, dass man gestanzte Karten doch auch sammeln könne. Verfügt man über alle möglichen Stanzmuster, so legt man nur einen Streifen Papier in den Stanzautomat und sucht in der Sammlung anschließend die passende bereits vorgestanzte Karte.

a. Wie viele solcher Karten müsste man sammeln, um alle möglichen Stanzmuster zu besitzen?
b. Passen alle Karten schätzungsweise in eine Aktentasche?
c. Wie lange dauert es, seine Kartensammlung vollständig zu durchsuchen, wenn man mit einer Karte 2 Sekunden beschäftigt ist?

6. (Mathematik-Olympiade 2004/05, Aufgabe für die 7. Klasse, Landesrunde)
Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Flächen eines Würfels mit sechs gegebenen Farben färben, wenn jede Farbe nur für eine Fläche verwendet werden darf? Als verschieden gelten nur die Färbungen, die nicht durch Drehung des Würfels ineinander übergeführt werden können.

7. Übung zur Termumformung
Bei der Entwicklung von $(a+b+c)^n$ kann man sich analog zum Binomischen Lehrsatz folgende Rekursionsformel überlegen:
Gilt als Nebenbedingung $k_a + k_b + k_c = n$ so gilt für die Koeffizienten der rekursive Zusammenhang

$$\frac{(n-1)!}{(k_a-1)!k_b!k_c!} + \frac{(n-1)!}{k_a!(k_b-1)!k_c!} + \frac{(n-1)!}{k_a!k_b!(k_c-1)!} = \frac{n!}{k_a!k_b!k_c!}$$

Zeigen Sie durch Termumformungen, dass diese Gleichung gilt.