Wintersemester 2008/09
Dr.Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

7. Übung
Teilbarkeit, Kreisdiagramme

Präsenzübungen (für 5.12.)

1. Begründen Sie durch ein allgemeines <u>Punktemuster</u>:
   a. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt $: a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$
   b. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ und $r,s \in \mathbb{N}$ gilt $: a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid rb+sc$

2. Ist die Menge $A = \{1, \frac{1}{3}, 3\}$ mit der normalen Multiplikation eine Gruppe? Welche der vier Eigenschaften sind ggf. nicht erfüllt?

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 9.12.)

3. (zu den Kreisdiagrammen)
   Gilt für zwei Zahlen $a,b \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ die Kongruenz $ab \equiv 1 \bmod m$, so sind die Diagramme für die Multiplikation mit a und mit b gleich.
   a. Geben Sie dazu ein Beispiel für $m = 11$. Verwenden Sie die Kreisvorlagen am Ende des Übungsblatts.
   (Hinweis: Zeichnen Sie Pfeile von der Ausgangszahl zur Ergebniszahl)
   b. Erläutern Sie durch Text und schließlich formal, was genau „...so sind die Diagramme für die Multiplikation mit a und mit b gleich." bedeutet. Zielen Sie auf eine beweisfähige, formale Aussage.
   c. Beweisen Sie die in b. formulierte Aussage.

4. Mathematische Sprache
   Eine Aufzählung $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ von 8 Dingen nennt man ein 8-Tupel.
   Es sei M die Menge der 8-Tupel mit folgender Eigenschaft: Für $i = 0, \ldots, 7$ gibt die Zahl n_i die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl i im 8-Tupel $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ an.
   (*Formulierung aus einer Aufgabe in der Mathematik-Olympiade, Klasse 10*)
   a. Warum ist (1,2,3,4,5) kein Element von M?
   b. Ist (3,3,1,1,1,0,0,0) ein Element von M? Erläutern Sie Ihre Antwort.
   c. Was muss in $(4,2,1,x,1,0,0,0)$ für x eingesetzt werden, damit das 8-Tupel zu M gehört?

5. Argumentieren mit Divisionsresten
   a. Welchen Rest kann eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ bei Division durch 4 lassen?
   b. Welchen Rest kann eine Quadratzahl n^2, $n \in \mathbb{N}$, bei Division durch 4 lassen?
   c. Begründen Sie, dass es nicht zwei natürliche Zahlen x und y geben kann, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 99999999999999999999$ erfüllen.

6. Die Übung zur Termumformung

   In der letzten Übung wurden zu einer biquadratischen Gleichung die Lösungen bestimmt.

   $$x^4 + 2(a+1)x^2 + a^2 = 0$$

   $$x = \sqrt{-(a+1)+\sqrt{2a+1}} \ \ oder \ \ x = -\sqrt{-(a+1)+\sqrt{2a+1}} \ \ oder$$

   $$x = \sqrt{-(a+1)-\sqrt{2a+1}} \ \ oder \ \ x = -\sqrt{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}$$

   Machen Sie mit der ersten und letzten angegebenen Lösung die Probe.