6. Übung
Kongruenzrechnung, Äquivalenzrelation

Präsenzübungen (für 28.11.)

1. Stellen Sie die Multiplikationstafel auf für die Restklassen von R_5 und R_6 (siehe Vorlesung).
   a. In welchen Zeilen der Multiplikationstafel von R_5 tauchen als Ergebnis alle Restklassen von R_5 auf?
   Wie ist das in der Tafel von R_6?
   b. Schreiben Sie alle Lösungen auf für $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$
      i. In R_5.
      ii. In R_6.
   c. Eine Restklasse $\overline{a} \in R_m, \overline{a} \neq \overline{0}$ heißt Nullteiler von R_m, wenn es eine Restklasse $\overline{b} \in R_m, \overline{b} \neq \overline{0}$ gibt mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Was sind nach Aufgabe b. die Nullteiler von R_5 und R_6?
   d. In der Vorlesung haben wir die Multiplikationstabelle für R_7 durchgerechnet. Suchen Sie in dieser nach Nullteilern.
   e. Stellen Sie Vermutungen an, wann Nullteiler auftauchen. Überprüfen Sie die Vermutungen an weiteren Beispielen.

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 2.12.)

2.
   a. Untersuchen Sie, ob die Relation „sind Cousin/Cousine“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Menschen ist. Untersuchen Sie dazu alle drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
   Definition: Zwei Menschen sind Cousin/Cousine, wenn Vater oder Mutter des einen und Vater oder Mutter des anderen Menschen Geschwister sind. („sind Geschwister“ ist wie in der Vorlesung die enge Definition)
   b. Zeigen Sie, dass „sind Aufgabengruppenpartner“ eine Äquivalenzrelation ist.
   Erläuterung: Zwei Menschen a,b sind Aufgabengruppenpartner, in Zeichen a AGP b, wenn sie in der Vorlesung „Arithmetik als Prozess“ in diesem Semester ihre Aufgaben in einer Gruppe abgeben.
   Was ist die Grundmenge und was sind die Äquivalenzklassen, in die die Grundmenge zerfällt?

3. Beweise:
   a. Beweisen Sie für die Menge aller Restklassen R_{10} zum Modul $m = 10$: Keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gehört gleichzeitig zu zwei Restklassen.
   b. Beweisen Sie allgemein: Es sei M eine Menge und $\otimes$ eine für die Elemente von M definierte Äquivalenzrelation. Wie in der Vorlesung eingeführt bezeichne $\overline{a}$ die Äquivalenzklasse bezüglich $\otimes$, in der $a \in M$ liegt.
   Dann gilt: $c \in \overline{a} \text{ und } c \in \overline{b} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$

4. Berechnen Sie $3^{132} \equiv x \bmod 11$, wobei x eine Zahl sein soll mit $0 \le x < 11$.
   Anleitung: Berechnen Sie möglichst geschickt zunächst $3 \equiv x_1 \bmod 11$, $3^2 \equiv x_2 \bmod 11$, $3^3 \equiv x_3 \bmod 11$ u.s.w., mit $0 \le x_i < 11$, bis Sie eine Regelmäßigkeit entdecken, mit der Sie dann das eigentliche Problem lösen können.

5. Die Übung zur Termumformung
   Lösen einer biquadratischen Gleichung:
   (1) $x^4 + 2(a+1)x^2 + a^2 = 0$
   (2) $x^2 = z$
   (3) $z^2 + 2(a+1)z + a^2 = 0$
   (4) $z^2 + 2(a+1)z + (a+1)^2 = (a+1)^2 - a^2$
   (5) $\left(z + (a+1)\right)^2 = 2a+1$
   (6) $z + (a+1) = \sqrt{2a+1}$ *oder* $z + (a+1) = -\sqrt{2a+1}$
   (7) $z = -(a+1) + \sqrt{2a+1}$ *oder* $z = -(a+1) - \sqrt{2a+1}$
   (8) $x^2 = -(a+1) + \sqrt{2a+1}$ *oder* $x^2 = -(a+1) - \sqrt{2a+1}$
   (9) $x = \sqrt{-(a+1) + \sqrt{2a+1}}$ *oder* $x = -\sqrt{-(a+1) + \sqrt{2a+1}}$ *oder*
   $x = \sqrt{-(a+1) - \sqrt{2a+1}}$ *oder* $x = -\sqrt{-(a+1) - \sqrt{2a+1}}$
   Erläutern Sie von Zeile zu Zeile die Umformungen, die vorgenommen wurden.