3. Übung
Logik, vollständige Induktion

Präsenzübungen (für 7.11.)

1. Bilden Sie zu den nachfolgenden Implikationen
   - die „nicht-oder“-Form
   - die Kontraposition
   - die Verneinung.

   Überlegen Sie, was die Umkehrung aussagt und ob sie wahr ist, wenn die gegebene Aussage wahr ist.
   Ergeben diese Konstruktionen immer einen Sinn?
   a. „Wenn du dich beeilst, dann bekommst du noch den Zug.“
   b. Wenn n durch 6 teilbar ist, dann ist n gerade.
   c. „Wenn heute Nachmittag die Sonne scheint, dann bin ich im Schwimmbad.“
   d. „Wenn Sie über 25 sind und einen gültigen Führerschein haben, dann können Sie dieses Auto mieten.“

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
   In einem konvexen n-Eck ist die Anzahl aller Verbindungslinien $V(n)$ zwischen den Punkten um n größer als die Anzahl der Diagonalen $D(n)$. Kurz $V(n) = D(n) + n$.

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 11.11.)

3. Wir betrachten Spielmarken, die auf der einen Seite einen Buchstaben haben und auf der anderen Seite eine Ziffer. Welche der gezeigten Spielmarken müssen Sie umdrehen, um zu testen, ob sie der Regel entsprechen: „Wenn der Buchstabe A oder B ist, dann ist die Ziffer keine 5“. Was muss dann die andere Seite zeigen?

   A B C 3 5

4. Beweisen Sie die Summenformeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

   a. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ b. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

5. Welche Umformung der Summen ist richtig, welche falsch? Erläutern Sie Ihre Antwort. Welche Umformung stellt das Distributivgesetz dar?

   a. $\sum_{j=1}^{n} aj = a\sum_{j=1}^{n} j$ b. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ c. $\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(k + k^2\right)$ d. $\sum_{i=1}^{n} c = c^n$

6. Erläutern Sie jeden Schritt der Umformung:

$$\left(1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}2\left(i+1\right)\right)+\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(2k-1\right)\right)$$

$$=\left(1+\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}}2i\right)+\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(2k-1\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}2i+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(2k-1\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

7. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\right)^2=na\left(a+n+1\right)+\sum_{k=1}^{n}k^2$$