Wintersemester 2008/09
Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

1. Übung
Spielen mit Zahlen, Formales Schreiben

Präsenzübungen (für 24.10.)

(Präsenzübungen sollen in der Übungsstunde selbst gerechnet werden. Natürlich können Sie hier schon mal reinschauen. Üblicherweise machen Sie zu Hause aber nur die Hausübungen und geben diese zum angegebenen Dienstag-Termin ab.)

1. Um die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 zu testen, kann man folgendermaßen vorgehen: Streichen Sie die letzte Ziffer und ziehen Sie von der verbliebenen Zahl das Doppelte der gestrichenen Ziffer ab. Führen Sie nun diese Operation wiederholt aus.
   Beispiel: $158 \cdot 7 = 1106$, 1106 ist also durch 7 teilbar
   6 streichen ergibt 110, davon $2 \cdot 6 = 12$ abziehen ergibt 98.
   8 streichen ergibt 9, davon $2 \cdot 8 = 16$ abziehen ergibt -7.

   a. Führen Sie Beispielrechnungen mit durch 7 teilbaren Zahlen durch: $278 \cdot 7$, $925 \cdot 7$, $876 \cdot 7$, $783 \cdot 7$. Und weitere.
   b. Was passiert, wenn die Zahl nicht durch 7 teilbar ist? Probieren Sie die Beispiele $528 \cdot 7+2$, $246 \cdot 7+3$, $613 \cdot 7+5$ und weitere.
   c. Wann können Sie sinnvoller Weise die Rechnung abbrechen? D.h. wann und wie können Sie entscheiden, dass Ihre Startzahl (nicht) durch 7 teilbar ist?
   d. Können Sie eine Erklärung geben?

2. Gabi gibt eine Party. Einen Tag vor der Party erhält sie die Antworten der Gäste: Peter will nur dann auf die Party, wenn Hannelore auch kommt. Jan hat zugesagt. Sabine ist die Schwester von Jan. Andrea kommt, wenn Peter hingeht. Entweder kommt Conny oder Hannelore. Sabine ist krank und hat abgesagt. Gabis bester Freund Zack kommt nicht, wenn Jan und Sabine beide kommen. Hannelore will nur kommen, wenn die Schwester von Jan kommt. Wer kommt, wer kommt nicht?

3. (Auffrischung der Bruchrechnung)
   Schreiben Sie formal auf, also mit einer algebraischen Gleichung. Geben Sie für die Variablen die Grundmenge an. Ein Bruch ist: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$

   a. Zwei gleichnamige Brüche werden addiert, indem die Zähler addiert werden und der (gleiche) Nenner beibehalten wird.
   b. Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert wird. Der erweiterte Bruch ist zum Ausgangsbruch gleich (groß).
   c. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der ganzen Zahl multiplizier wird und der Nenner beibehalten wird.
   d. Zwei Brüche werden multipliziert, indem die Zähler miteinander multipliziert werden und die Nenner.
   e. Ein Bruch (Dividend) wird durch einen Bruch (Divisor) dividiert, indem der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird.

4. Wiederholtes Abziehen
   Denken Sie sich drei Ziffern aus. Bilden Sie aus diesen drei Ziffern die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl. Ziehen Sie von der größeren die kleinere ab.
   Beispiel: Gedacht: 4, 7, 3. Größte Zahl 743, kleinste Zahl 347, Differenz 743-347=396
   Sie erhalten wieder eine dreistellige Zahl. Bilden Sie aus deren Ziffern wieder die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl. Ziehen Sie von der größeren die kleinere ab.
   Wiederholen Sie den Prozess, bis „sich nichts mehr ändert".
   a. Untersuchen Sie diesen Prozess mit verschiedenen Beispielen. Schreiben Sie ein kurzes Protokoll für diese Untersuchung. Punkte: Welche Struktur haben die Ergebniszahlen? Wie verändern sich die Zahlen von Ergebnis zu Ergebnis? Wann verändert sich nichts mehr?
   b. Es seien die drei gedachten Ziffern allgemein a, b, c mit $a < b < c$. Führen Sie damit die Rechnung durch und begründen Sie so die Struktur der Ergebniszahlen.

Hausübungen (Abgabe: Dienstag, 28.10.)

5. $G = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ Diese Ansammlung von mathematischen Zeichen beschreibt die Menge G als die Menge aller (positiven) geraden Zahlen. In einer kurzen, etwas nachlässigeren Schreibweise schreibt man dann für „Sei n eine gerade Zahl" kurz $n = 2k$.
   Schreiben Sie ebenso schön und auch kurz:
   a. Die Menge der ungeraden Zahlen.
   b. Die Menge aller Zahlen, die beim Teilen durch 6 den Rest 4 lassen.
   c. Die Menge aller Zahlen, die eine Quadratzahl, vermehrt um 1, sind.
   d. Eine zweistellige Zahl, in der die Einerziffer um 3 größer ist als die Zehnerziffer.

6. Führen Sie Aufg. 4 mit vier Ziffern/vierstelligen Zahlen durch. Wie lautet hier die Zahl, auf die der Prozess hinausläuft? Welche Eigenschaften haben die jeweiligen Differenzen?

7. Zeigen Sie mit einer Wahrheitstafel das Distributivgesetz
   $a \text{ oder } (b \text{ und } c) \Leftrightarrow (a \text{ oder } b) \text{ und } (a \text{ oder } c)$

8. Begründen/Beweisen Sie: Eine zweistellige Zahl ist immer größer als ihre Quersumme.