

3 Geometrisches Beweisen

3.1 Axiome

Durch empirische Untersuchungen werden immer wieder Gesetzmäßigkeiten gefunden, die man versucht durch logische Schlüsse zu begründen. Irgendwann am Ende einer Schlusskette trifft man auf Aussagen, die einfach nicht mehr zu beweisen sind.

Versuchen Sie doch zum Beispiel einmal zu beweisen, warum die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Viele werden jetzt wahrscheinlich ein Bild eines Dreiecks $\triangle ABC$ zeichnen und es über eine Parallele zu \overline{AB} durch C mit Hilfe von Wechsel- und Scheitelwinkeln zeigen.

Doch könnten Sie jetzt auch ohne Weiteres beweisen, warum Wechselwinkel gleich groß sind?

Diesen Beweis könnten Sie auch bestimmt auf irgend eine Weise entwickeln, doch bei der Frage, warum es denn nur eine Parallele durch C gibt, müssten Sie spätestens aufgeben.

Irgendwann gelangen wir an ein Ende der Kette, das nicht mehr bewiesen werden kann.

Solche Kernsätze, Festlegungen, Grundannahmen, auf die wir letztendlich stoßen, nennen wir Axiome.

Man kann sich Axiome vorstellen, als wären es Spielregeln. Um ein Spiel spielen zu können, muss man die Spielregeln beherrschen. Diese dürfen sich nicht widersprechen, müssen vollständig sein, aber nicht überbestimmt.

Genauso werden Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit von einem Axiomensystem gefordert.



Euklid war derjenige, der die Bemühungen um eine Axiomatisierung zum Abschluss brachte und das mathematische Wissen seiner Zeit zusammentrug.

1899 gab David Hilbert mit seinem Buch „Grundlagen der Geometrie“ dem Axiomensystem seine heute gängige Form. Sein System besteht aus fünf Axiomengruppen:

- Axiome der Verknüpfung,
- Axiome der Anordnung,
- Axiome der Kongruenz,
- Axiome der Parallelen,
- Axiome der Stetigkeit.

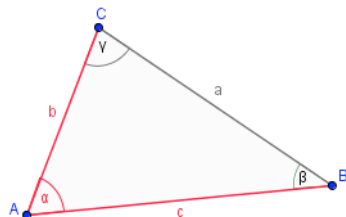
In unseren Beweisen benutzen wir zum einen Sätze, wie „die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° “, die wir voraussetzen können, da wir (oder andere) sie bereits bewiesen haben, zum anderen verwenden wir oft unbewusst Axiome, ohne sie wirklich zu kennen. Ein Axiom wäre beispielsweise, dass es zu zwei Punkten nur eine einzige Gerade gibt, die durch die beiden Punkte verläuft.

Wir sollten uns also bewusst sein, dass es Axiome gibt, die ohne Beweise vorausgesetzt werden müssen, um aus ihnen mathematische Sätze logisch ableiten zu können.

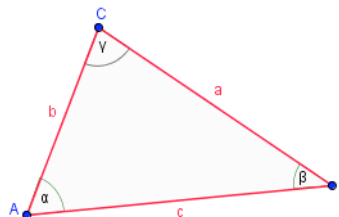
3.1.1 Kongruenzsätze

Ein Dreieck ist mit Hilfe von drei Angaben eindeutig festgelegt, wobei mindestens eine Angabe über eine Seite des Dreieckes gemacht werden muss. Sind nur die drei Winkel eines Dreieckes bekannt, so können wir dieses Dreieck nicht eindeutig zeichnen. Demnach gibt es vier Möglichkeiten, mit denen man die Kongruenz zweier Dreiecke bestimmen kann.

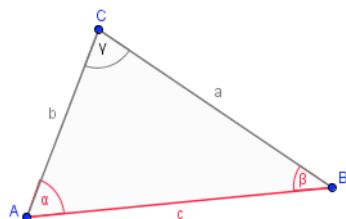
A: „Seite-Seite-Seite“ (SSS)



B: „Seite-Winkel-Seite“ (SWS)



C: „Seite-Seite-Winkel“ (SsW)



D: „Winkel-Seite-Winkel“ (WSW)

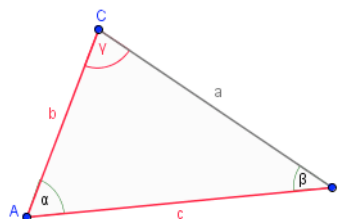


Abb. 3.1: Veranschaulichung der Kongruenzsätze



Satz 3.1 (Kongruenzsätze)

- „SSS“: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge aller drei Seiten übereinstimmen.
- „SWS“: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und in der Größe des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.
- „SsW“: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und in der Größe des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.
- „WSW“: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Größe zweier Winkel und in der Länge der von den Winkeln eingeschlossenen Seite übereinstimmen.

Die Kongruenzsätze bilden die Grundlage für ein in der Geometrie häufig verwendetes Beweisverfahren. In einem Kongruenzbeweis wird die Gleichheit zweier Streckenlängen oder zweier Winkelgrößen dadurch begründet, dass man die Kongruenz zweier geeigneter Dreiecke zeigt, um daraus die Gleichheit der Streckenlängen bzw. Winkelgrößen zu folgern.

3.2 Beweisen mit Kongruenzsätzen

3.2.1 Der Basiswinkelsatz

Wir beginnen die Serie von geometrischen Sätzen mit einem einfachen, aber grundlegenden Beispiel. Dieser Satz ist für andere Beweise hilfreich, die uns immer wieder begegnen.



Satz 3.2 (Basiswinkelsatz)

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß („Basiswinkelsatz“).

Für Abbildung 3.2 heißt das, dass die Winkel $|\sphericalangle BAC|$ und $|\sphericalangle CBA|$ dieselbe Größe haben, wenn die beiden Schenkel \overline{AC} und \overline{BC} gleich lang sind.

Umgekehrt gilt auch, dass ein gleichschenkliges Dreieck vorliegt, wenn die Größe zweier Winkel übereinstimmt.

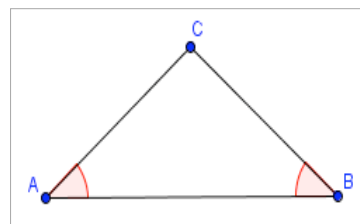


Abb. 3.2:
Gleichschenkliges Dreieck

$$\text{Formal: } |\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Leftrightarrow |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA|$$



Beweis

Um den Basiswinkelsatz zu beweisen, zeichnen wir als Hilfslinie die Höhe h_c ein, die senkrecht auf \overline{AB} steht und diese Strecke im Punkt H_c schneidet.

„ \Rightarrow “:

Wir betrachten die beiden Dreiecke

$\underline{\triangle AH_cC}$ und $\underline{\triangle H_cBC}$:

$$|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \quad (\text{Voraussetzung: gleichschenkliges Dreieck})$$

$$|\overline{CH_c}| = |\overline{CH_c}| \quad (\text{Strecke in beiden Dreiecken enthalten})$$

$$|\sphericalangle CH_cA| = |\sphericalangle BH_cC| = 90^\circ$$

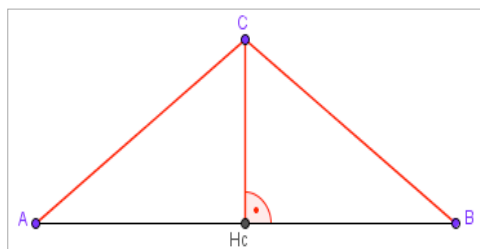


Abb. 3.3: Anwendung des Kongruenzsatzes SsW

Aus dem Kongruenzsatz SsW (siehe Abb. 3.3) können wir nun folgern, dass die beiden Dreiecke $\triangle AH_cC$ und $\triangle H_cBC$ kongruent sind und damit insbesondere auch die Winkel $\sphericalangle H_cAC$ und $\sphericalangle CBH_c$ dieselbe Größe haben. ■

„ \Leftarrow “:

Der Beweis in die andere Richtung kann ähnlich erfolgen. Es muss jedoch mit einem anderen Kongruenzsatz gearbeitet werden, da nun vorausgesetzt wird, dass die beiden Basiswinkel gleich groß sind. Um nun zu zeigen, dass dann die beiden Schenkel gleich lang sind, betrachten wir erneut die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{l} \underline{\triangle AHcC} \quad \text{und} \quad \underline{\triangle HcBC}: \\ |\angle HcAC| = |\angle CBHc| \quad (\text{Voraussetzung}) \\ |\overline{CHc}| = |\overline{CHc}| \quad (\text{Strecke in beiden Dreiecken enthalten}) \\ |\angle CHcA| = |\angle BHcC| = 90^\circ \end{array}$$

Da zwei Winkelgrößen in den beiden Dreiecken $\triangle AHcC$ und $\triangle HcBC$ übereinstimmen und die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck immer 180° beträgt, ist die Größe der beiden anderen Winkel ebenfalls identisch, so dass gilt: $|\angle ACHc| = |\angle HcCB|$.

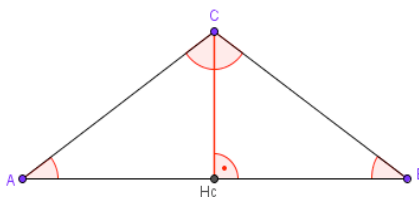


Abb. 3.4: Anwendung des Kongruenzsatzes WSW

Somit können wir aus dem Kongruenzsatz WSW schließen, dass die beiden Dreiecke $\triangle AHcC$ und $\triangle HcBC$ wieder kongruent sind und insbesondere auch $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ gilt. ■

3.3 Der Satz über Mittelsenkrechten

Auch dieser Satz gehört zu den Grundlagen geometrischer Beweise und ist daher ebenfalls für unsere nachfolgenden Beweise wichtig.

Satz 3.3 (Satz über Mittelsenkrechten)

Jeder Punkt P auf der Mittelsenkrechten einer Strecke \overline{AB} hat zu den beiden Punkten A und B denselben Abstand. Gleichzeitig gilt, dass ein Punkt P, der denselben Abstand zu zwei Punkten A und B hat, auf der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} liegt (siehe Abb. 3.5).

Formal: $P \in m_{AB} \Leftrightarrow |\overline{PA}| = |\overline{PB}|$

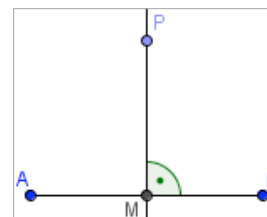


Abb. 3.5: Mittelsenkrechte einer Strecke \overline{AB}



**Beweis**„ \Rightarrow “:

Wir betrachten die beiden Dreiecke

 $\triangle AMP$ und $\triangle MBP$:

$$|\overline{AM}| = |\overline{MB}| \quad (\text{M ist Mittelpunkt von } \overline{AB})$$

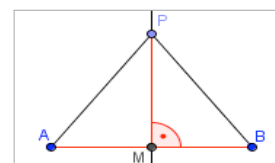
$$|\overline{MP}| = |\overline{MP}| \quad (\text{Strecke in beiden Dreiecken enthalten})$$

$$|\angle PMA| = |\angle BMP| = 90^\circ$$

Aus dem Kongruenzsatz SWS (siehe Abb. 3.6)

folgt:

$$\triangle AMP \cong \triangle MBP.$$

**Abb. 3.6:** Anwendung des Kongruenzsatzes SWSUnd daraus folgt insbesondere $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$. ■„ \Leftarrow “:Wir fällen ein Lot von P auf die Gerade AB, so dass $|\angle PM'A| = |\angle BM'P| = 90^\circ$ gilt. Wenn wir nun zeigen, dass derSchnittpunkt M' des Lotes mit der Strecke \overline{AB} der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ist, ist M'P Mittelsenkrechte dieser Strecke und damit liegt der Punkt P auf der Mittelsenkrechten, was zu zeigen ist.

Wir betrachten erneut die Dreiecke

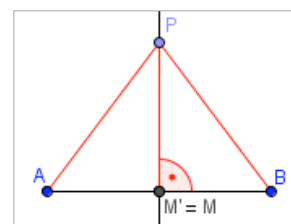
 $\triangle AMP$ und $\triangle MBP$:

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| \quad (\text{Voraussetzung})$$

$$|\overline{MP}| = |\overline{MP}| \quad (\text{Strecke in beiden Dreiecken enthalten})$$

$$|\angle PM'A| = |\angle BM'P| = 90^\circ$$

Aus dem Kongruenzsatz SSW (siehe Abb. 3.7) folgt:

Daher ist M' der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ($M = M'$). Und daraus folgt insbesondere $P \in m_{AB}$. ■**Abb. 3.7:** Anwendung des Kongruenzsatzes SSW**3.3.1 Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks****Satz 3.4 (Satz über die Mittelsenkrechten eines Dreiecks)**Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt M. M ist außerdem der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ (siehe Abb. 3.8).

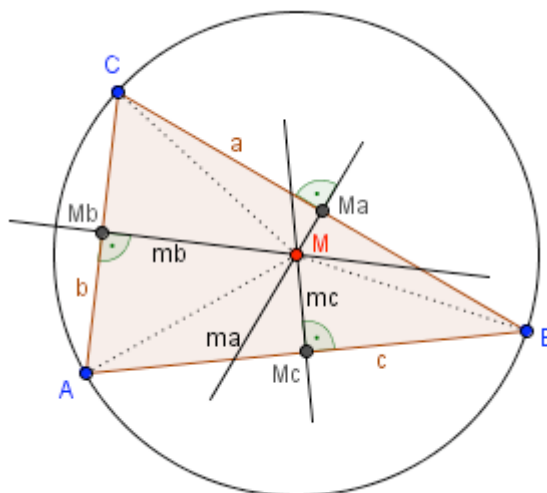


Abb. 3.8: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in M, M ist Mittelpunkt des Umkreises.



Beweis (Prototyp eines einfachen, aber dennoch gehaltvollen Beweises)

Wir betrachten zunächst zwei Mittelsenkrechte m_a und m_b , die sich in einem Punkt M schneiden. Da M auf der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{BC} liegt, gilt $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$. Außerdem liegt der Punkt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AC} , so dass gilt $|\overline{MA}| = |\overline{MC}|$ (vgl. 3.2.2 Satz über Mittelsenkrechten).

Aufgrund der Transitivität des Gleichheitszeichens ($a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$) gilt nun $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$.

Die Umkehrung des Satzes 3.2.2 (Satz über Mittelsenkrechten) besagt nun, dass M auf der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} liegen muss und somit m_c ebenfalls durch den Punkt M geht.

Damit treffen sich die drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck in einem Punkt. ■

Da der Punkt M nun denselben Abstand zu den drei Eckpunkten des Dreiecks hat, ist es der Mittelpunkt des Umkreises mit dem Radius $r = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$.

3.3.2 Satz über die Winkelhalbierende



Satz 3.5 (Satz über Winkelhalbierende)

Jeder Punkt P auf einer Winkelhalbierenden w_α hat zu den beiden Schenkeln des Winkels α denselben Abstand.

Gleichzeitig gilt, dass ein Punkt P, der denselben Abstand zu zwei Schenkeln eines Winkels α hat, auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels liegt.

Formal: $P \in w_\alpha \Leftrightarrow |\overline{PQ}| = |\overline{PR}|$ (siehe Abb. 3.9).

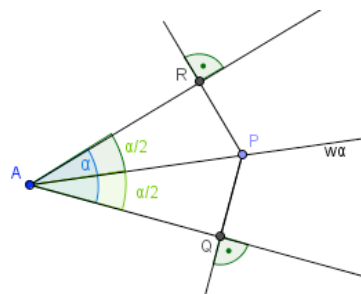


Abb. 3.9: Winkelhalbierende w_α hat zu den beiden Schenkeln denselben Abstand.



Beweis

„ \Rightarrow “:

Wir betrachten die beiden Dreiecke

$\triangle AQP$ und $\triangle APR$:

$ \overline{AP} $	=	$ \overline{AP} $	(Strecke in beiden Dreiecken enthalten)
$ \sphericalangle QAP $	=	$ \sphericalangle PAR $	= $\alpha/2$
$ \sphericalangle PQA $	=	$ \sphericalangle ARP $	= 90°

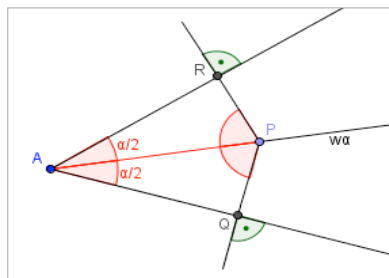


Abb. 3.10: Anwendung des Kongruenzsatzes WSW

Da zwei Winkelgrößen in den beiden Dreiecken übereinstimmen und die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck immer 180° beträgt, ist die Größe der beiden anderen Winkel ebenfalls identisch, so dass gilt: $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle RPA|$.

Nun können wir aus dem Kongruenzsatz WSW folgern, dass die beiden Dreiecke $\triangle AQP$ und $\triangle APR$ kongruent sind (siehe Abb. 3.10).

Und damit gilt insbesondere: $|\overline{PQ}| = |\overline{PR}|$. ■

„ \Leftarrow “:

In diesem Fall ist die Voraussetzung, dass wir einen Punkt P haben, der zu den zwei Schenkeln eines Winkels α denselben Abstand hat (in unserem Fall $|\overline{PQ}| = |\overline{PR}|$), gegeben. Wieder betrachten wir die beiden

Dreiecke $\triangle AQP$ und $\triangle APR$, wobei die Strecke \overline{AP} jedoch nicht ohne weiteres die Winkelhalbierende des Winkels α ist.

$$\begin{array}{l}
 \underline{\Delta AQP} \quad \text{und} \quad \underline{\Delta APR}: \\
 \overline{AP} = \overline{AP} \quad (\text{Strecke in beiden Dreiecken enthalten}) \\
 \overline{PQ} = \overline{PR} \quad (\text{Voraussetzung}) \\
 |\angle PQA| = |\angle ARP| = 90^\circ
 \end{array}$$

Nach dem Kongruenzsatz SsW folgt nun, dass die beiden Dreiecke ΔAQP und ΔAPR kongruent sind (siehe Abb. 3.11) und insbesondere damit auch gezeigt ist, dass die Winkel $|\angle QAP|$ und $|\angle PAR|$ gleichgroß sind und damit die Strecke \overline{AP} die Winkelhalbierende von α ist. P liegt demnach auf der Winkelhalbierende des Winkels α . ■

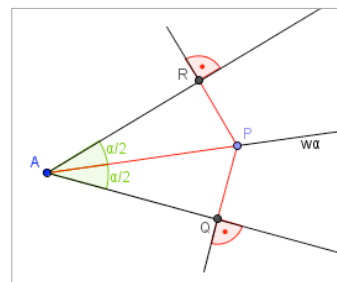


Abb. 3.11: Anwendung des Kongruenzsatzes SsW

3.3.3 Winkelhalbierende eines Dreiecks



Satz 3.6 (Satz über die Winkelhalbierenden eines Dreiecks)

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ΔABC schneiden sich in einem Punkt W.

W ist außerdem der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC (siehe Abb. 3.12).

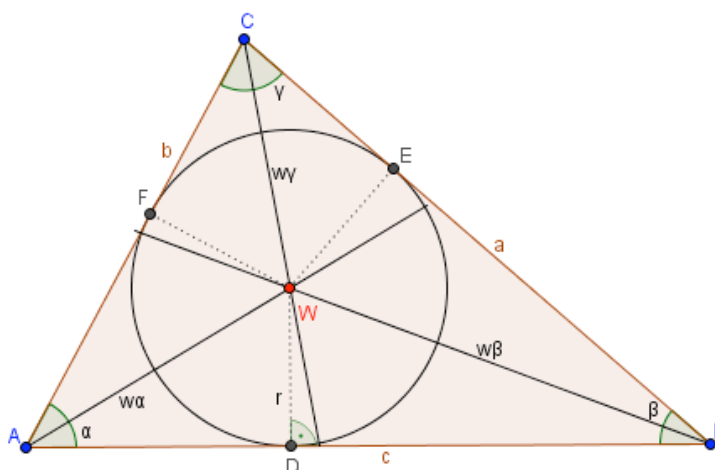


Abb. 3.12: Die Winkelhalbierenden schneiden sich in W, W ist Mittelpunkt des Inkreises.

Beweis



Wir betrachten zunächst zwei Winkelhalbierende w_α und w_β , die sich in einem Punkt W schneiden. Da W auf der Winkelhalbierenden des Winkels α liegt, gilt $|\overline{WD}| = |\overline{WF}|$. Außerdem liegt der Punkt W auf der

Winkelhalbierenden des Winkels β , so dass gilt $|\overline{WD}| = |\overline{WE}|$ (vgl. 3.2.4 Satz über die Winkelhalbierende).

Aufgrund der Transitivität des Gleichheitszeichens gilt nun $|\overline{WF}| = |\overline{WE}|$.

Die Umkehrung des Satzes 3.2.4 besagt, dass W auf der Winkelhalbierenden des Winkels γ liegen muss, wenn er zu den beiden Schenkeln denselben Abstand hat, und somit geht w_γ ebenfalls durch den Punkt W.

Damit treffen sich die drei Winkelhalbierenden in einem Dreieck in einem Punkt. ■

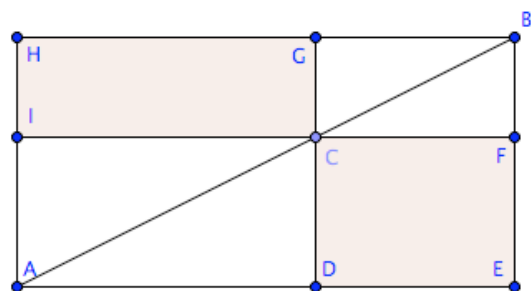
Da der Punkt W nun denselben Abstand zu den drei Seiten des Dreiecks hat, ist es der Mittelpunkt des Inkreises mit dem Radius $r = |\overline{WD}| = |\overline{WE}| = |\overline{WF}|$.

3.4 Übungsaufgaben

1. Wiederholen Sie die nachfolgenden Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal.
 - a. Halbierung eines gegebenen Winkels.
 - b. Mittelsenkrechte einer Strecke
 - c. Senkrechte zu einer Geraden g durch einen Punkt P
 - i. wenn $P \notin g$
 - ii. wenn $P \in g$
 - d. Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P

2.

- a. Begründen Sie, warum das Rechteck CDEF flächengleich ist zum Rechteck CGHI.
- b. Gegeben ist ein Rechteck mit den Kantenlängen 4cm und 5 cm. Verwandeln Sie

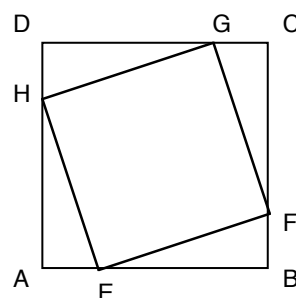


es in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 7 cm ist. Verwenden Sie dabei die hier vorgestellte Konstruktion. Beschreiben Sie die Schritte Ihrer Konstruktion.

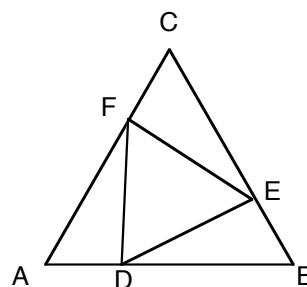
3. In einem Rechteck ABCD wird zu \overline{AB} die Mittelsenkrechte m gezeichnet. Beweisen Sie, dass m auch Mittelsenkrechte zur Seite \overline{CD} ist. Hinweis:
 1. Überlegen Sie, was man im Einzelnen zeigen muss, um „ist Mittelsenkrechte“ zu beweisen.

2. Als bekannt können Sie annehmen: In einem Rechteck sind
- gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang
 - alle Winkel rechte Winkel
4. Umkreise von Vierecken
- a. Im Allgemeinen hat ein Viereck keinen Umkreis. Zeichnen Sie ein Viereck, dessen vier Ecken **nicht** auf einem Kreis liegen.
 - b. In einem Viereck ABCD gilt $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC| = 90^\circ$.
Begründen Sie möglichst genau, warum dann die vier Punkte immer auf einem Kreis liegen müssen, solch ein Viereck also immer einen Umkreis hat.
5. Ein Viereck, in dem alle vier Seiten gleich lang sind, heißt Raute. Beweisen Sie mit Hilfe von kongruenten Dreiecken (Kongruenzsätze), dass in jeder Raute die Diagonalen zueinander senkrecht sind.
6. Beweisen Sie: In einem Parallelogramm sind gegenüber liegende Seiten gleich lang.
Hinweis: Suchen/Erzeugen Sie kongruente Dreiecke für den Beweis.

7. (siehe Zeichnung rechts) In einem Quadrat ABCD werden von den Ecken gleich lange Strecken abgetragen, so dass die Punkte E, F, G und H entstehen. Beweisen Sie, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.



8. (siehe Zeichnung rechts) In einem gleichseitigen Dreieck ABC werden von den Ecken gleich lange Strecken abgetragen, so dass die Punkte D, E und F entstehen. Beweisen Sie, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist.



9. Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC. Konstruieren Sie über der Seite \overline{BC} das gleichseitige Dreieck, das die Fläche von ABC nicht überdeckt. Der dritte Punkt ist A' . Führen Sie die entsprechende Konstruktion über der Seite \overline{AC} aus und erhalten Sie so den Punkt B' . Beweisen Sie, dass $\overline{AA'}$ so lang ist wie $\overline{BB'}$.