Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09

14. Übung. Lösungsskizzen

1. a) $F = 12 \rightarrow 4 \cdot 12 = 48$ Flächenecken

davon 24 stumpf $\xrightarrow{:3}$ 8 Raumecken

davon 24 spitz $\xrightarrow{:4}$ 6 "

14 Ecken

$4 \cdot 12$ Flächenkanten $\xrightarrow{:2}$ 24 Raumkanten

$E + F = 14 + 12 = 26$ $\quad k = 24 \quad 24 + 2 = 26$ ✓

b) 6 Achtecke

8 Sechsecke

12 Vierecke

26 Flächen

Probe: Es ist der Archimedische Körper mit (8, 6, 4)

Also muss es gleich viele Achteck- wie Sechseck wie Viereckecken geben $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 12 \cdot 4 = 48$

$\Rightarrow E = 48$

Kanten: $6 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 12 \cdot 4 = 144$ Flächenkanten

$\xrightarrow{:2}$ 72 Raumkanten

$E + F = 48 + 26 = 74 \quad k + 2 = 72 + 2 = 74$ ✓

2. a) Die Aussage ist wahr, denn die Zahlen enden dann auf 00, 12, 24, 36, 48. Diese Zahlen sind alle durch 4 teilbar

b) Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist die Einerziffer das Doppelte der Zehnerziffer.

Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel ...16

c) Ist eine Zahl nicht durch 4 teilbar, so kann die Einerziffer nicht das Doppelte der Zehnerziffer sein.

noch 2c)

Die Kontraposition ist wahr, da die ursprüngliche Aussage wahr ist.

2d) In einer Zahl ist die Einerziffer das Doppelte der Zehnerziffer und die Zahl ist nicht durch 4 teilbar.

Die Aussage ist falsch, da die ursprüngliche Aussage wahr ist.

3. Ind. Anfang: $n = 1$ $\quad 0 \cdot 2 = 0$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = 0 \checkmark$$

Ind Vorauss.: $\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$

Ind. Behaupt.: $\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{5(n+1)}{6}$

Beweis: $$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1)}_{\text{Ind. Vor.}} + n(n+2)$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} + n(n+2)$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{3n}{2} + \frac{7n}{6}$$

Ind. Behauptung „entgegenrechnen"

$$\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{5(n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) - \frac{5}{6}(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$$

$\square$

4. a) Die Gewichtszahlen sind Zahlen, die kongruent ~~1~~ zu den Zehnerpotenzen mod 17 sind

$1 \equiv 1 \mod 17$

$10 \equiv 10 \equiv -7 \mod 17$	$10^9 \equiv 7 \mod 17$
$100 \equiv -2 \mod 17$	$10^{10} \equiv 2 \mod 17$
$1000 \equiv -3 \mod 17$	$10^{11} \equiv 3 \mod 17$
$10^4 \equiv 4 \mod 17$	$10^{12} \equiv -4 \mod 17$
$10^5 \equiv 6 \mod 17$	$10^{13} \equiv -6 \mod 17$
$10^6 \equiv -8 \mod 17$	$10^{14} \equiv 8 \mod 17$
$10^7 \equiv 5 \mod 17$	$10^{15} \equiv -5 \mod 17$
$10^8 \equiv -1 \mod 17$	$10^{16} \equiv 1 \mod 17$

Die Gewichtszahlen haben eine Periode von 16, das ist die längste Periode, die bei 17 auftauchen kann

b) $\begin{matrix} 7 & 2 & 8 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & -7 & 1 \end{matrix}$ Gew. Quersumme: $7\cdot 4 - 3\cdot 2 - 2\cdot 8 - 6\cdot 7 + 2\cdot 1$

$= 30 - 64 = -34 \equiv 0 \mod 17$

$\begin{matrix} 1 & 8 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 & -7 & 1 \end{matrix}$ Gew. Quersumme

$= 6 + 32 - 15 - 10 - 35 + 5$

$= 43 - 60 = -17 \equiv 0 \mod 17$

$\begin{matrix} 1 & 6 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & -8 & 6 & 4 & -3 & -2 & -7 & 1 \end{matrix}$ Gew. Quersumme

$= 5 - 48 + 36 + 32 - 3 - 6 - 35 + 2$

$= 75 - 92 = -17 \equiv 0 \mod 17$

c) $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 5 & -8 & 6 & 4 & -3 & -2 & -7 & 1 \end{matrix}$ Gew. Quersumme

$= 2 - 1 - 8 + 4x - 2 + 1$

$= 3 - 11 + 4x$

$4x - 8$ soll für $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ eine durch 17 teilbare Zahl ergeben: $x = 2$ ist einzige Lösung