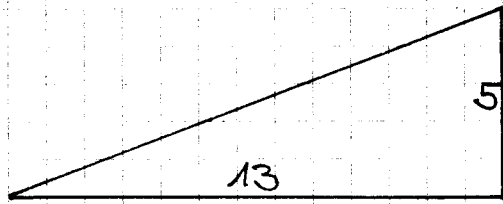


13. Übung, Lösungsskizzen

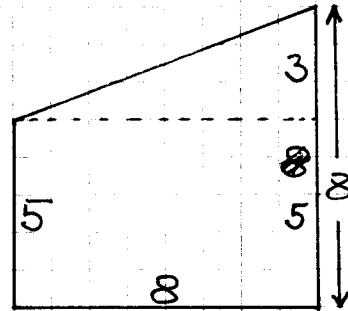
Präsenzübung

1. Beim Umlegen in das Rechteck wird angenommen, dass die Steigung im Dreieck die gleiche ist wie die im Trapez.

DAS IST NICHT RICHTIG! denn



$$m_1 = \frac{5}{13} = \frac{40}{104}$$

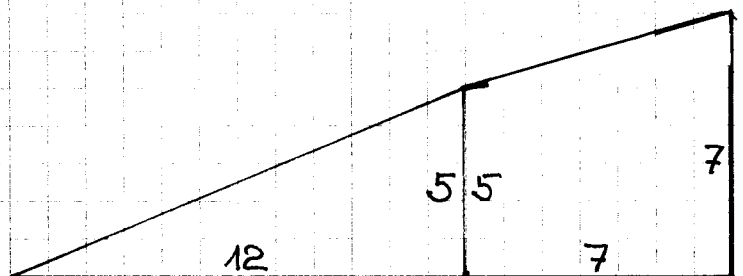
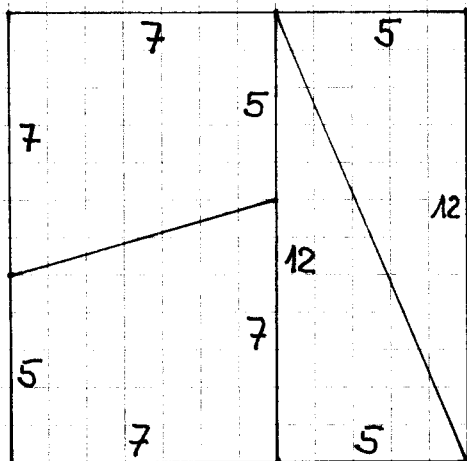


$$m_2 = \frac{3}{8} = \frac{39}{104}$$

Man sieht, dass $m_1 > m_2$

Die Puzzleteile überlappen sich im Rechteck und lassen so eine FE „verschwinden“.

Das wird deutlicher bei ungünstigeren Zahlen



Die Fibonacci-Zahlen sind hier günstig, da der Quotient aufeinander folgender Zahlen fast gleich ist und die Summe von zweien die nächste ergibt

Hausübungen

2

$$2. a) a_3 = 38 \quad a_4 = a_3 + d = 38 + d \quad a_5 = 38 + 2d = 48 \\ \Rightarrow d = 5$$

$$\text{Zurücklaufen zu } a_0: a_3 = 38 \quad a_2 = 33 \quad a_1 = 28 \quad \underline{\underline{a_0 = 23}}$$

$$b) \text{ explizite Form: } a_n = a_0 + n \cdot d$$

$$\underline{\underline{a_n = 23 + 5n}}$$

$$a_{50} = 23 + 5 \cdot 50 = \underline{\underline{273}}$$

3. Startzahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$

$$\begin{array}{cccccc} a & b & a+b & a+2b & 2a+3b & 3a+5b \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \end{array}$$

$$\text{Bedingung für } a, b: 3a + 5b = 100$$

$$3a = 100 - 5b = 5(20 - b)$$

$$a = 5 \frac{20-b}{3}$$

Damit $a \in \mathbb{N}$, muss $20-b$

durch 3 teilbar sein und $20-b > 0$

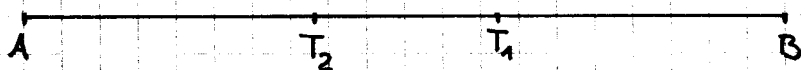
Da $b > a$, beginnen wir mit großen b

b	17	14	11	8	5	2
$\frac{20-b}{3}$	1	2	3	4	5	6
a	5	10	15	20	25	30

a) Beachtet man $b > a$ und $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$,

so sind $(a, b) = (5, 17)$ und $(a, b) = (10, 14)$ Lösungen

b) Fordert man nur $a, b \in \mathbb{N}$, so sind alle Möglichkeiten der Tabelle zulässig.



$$|AT_1| = \varphi \cdot |AB| \approx 0,618 \cdot 10\text{cm} = 6,18\text{cm}$$

$$|AT_2| = \varphi \cdot |AT_1| = \varphi^2 \cdot |AB| \approx 0,382 \cdot 10\text{cm} = 3,82\text{cm}$$

T_2 ist der „goldene Schnitt“ zum „goldenen Schnitt“ T_1 .

Die Länge $|AT_2|$ ergibt sich dann durch φ^2

c)

Major $|AT_1| = \varphi \cdot |AB|$

Minor $|T_1B| = (1-\varphi) |AB|$

Ansatz für den goldenen Schnitt: $\frac{\varphi \cdot |AB|}{\frac{|AB|}{1}} = \frac{(1-\varphi) |AB|}{\varphi |AB|}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1-\varphi}{\varphi} \Rightarrow \varphi^2 = 1-\varphi$$

$\uparrow$ Major vom Major $\uparrow$ Minor

5. $F_1 = 1$ $F_2 = 1$ $F_3 = 2$ $F_4 = 3$ $F_5 = 5$ $F_6 = 8$ $F_7 = 13$

$F_8 = 21$ $F_9 = 34$

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

a) $n = 4$: $F_3 \cdot F_5 = 2 \cdot 5 = 10$ $F_4^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \checkmark$

$n = 5$: $F_4 \cdot F_6 = 3 \cdot 8 = 24$ $F_5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 \checkmark$

$n = 8$: $F_7 \cdot F_9 = 13 \cdot 34 = 442$ $F_8^2 + 1 = 441 + 1 = 442 \checkmark$

b) Induktionsanf. $n = 2$

($n = 1$ geht nicht wegen $n-1 = 0$)

$F_1 \cdot F_3 = 1 \cdot 2 = 2$

$F_2^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \checkmark$

Ind. Voraussetzung

$F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$

Ind. Behauptung

$F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

→

Beweis:

$$\bar{F}_n \cdot \bar{F}_{n+2}$$

$$= \bar{F}_n \cdot (\bar{F}_n + \bar{F}_{n+1})$$

$$= \bar{F}_n^2 + \bar{F}_n \cdot \bar{F}_{n+1}$$

$$\bar{F}_n + \bar{F}_{n+1} = \bar{F}_{n+2} \text{ einsetzen}$$

ausmultipl.

$$\text{ind. vor: } \bar{F}_{n-1} \cdot \bar{F}_{n+1} = \bar{F}_n^2 + (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow \bar{F}_{n-1} \cdot \bar{F}_{n+1} - (-1)^n = \bar{F}_n^2$$

einsetzen

$$= \bar{F}_{n-1} \cdot \bar{F}_{n+1} - (-1)^n + \bar{F}_n \cdot \bar{F}_{n+1}$$

 $\bar{F}_{n+1}$ ausklammern

$$= (\bar{F}_{n-1} + \bar{F}_n) \cdot \bar{F}_{n+1} - (-1)^n$$

$$\bar{F}_{n-1} + \bar{F}_n = \bar{F}_{n+1} \text{ eins.}$$

$$= \bar{F}_{n+1}^2 - (-1)^n$$

$$-a = +(-1) \cdot a \text{ eins.}$$

$$= \bar{F}_{n+1}^2 + (-1)(-1)^n$$

$$= \bar{F}_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \quad \square$$

Binom. Lehrsatz

$$6. \quad \bar{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right) \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{8} \left(1 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^3 - (1 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{8} \left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 8} 16 \cdot \sqrt{5}$$

$$= 2 \quad \checkmark$$