Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09

12. Übung, Lösungsskizzen

Präsenzübungen

1 a i) Formel: n^k $n=2$ Farben

$k=4$ Ziehungen

$\Rightarrow$ Es gibt $2^4 = 16$ versch. Möglichkeiten für das Ziehen

ii) Formel $\binom{n-1+k}{k}$ $n=2$ Farben

$k=4$ Ziehungen

$\binom{2-1+4}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten

nämlich (wwww) (wwws) (wwss) (wsss) (ssss)

b) Unterscheidet man nur die Farben, so kommt es doch zu Wiederholungen, da die Farben wiederholt vorkommen. $\Rightarrow$ Nicht stur die Formeln anwenden, sondern (erneut) denken

i) Da die Farben mehrfach vorkommen, kann man die Ziehung zunächst wie a i) behandeln.

$\Rightarrow$ 16 Möglichkeiten. Der Fall (ssss) ist nicht möglich $\Rightarrow$ Es gibt 15 Möglichkeiten

ii) Wie oben a ii). Auch hier ist (ssss) nicht möglich $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

2. a) Es bleibt bei 4 Ziehungen

i) Dann bleibt es bei $n=2$ Farben, $k=4$ Ziehungen und damit $2^4 = 16$ Ziehungen

ii) Auch hier bleibt es bei den 5 oben dargestellten Möglichkeiten

~~Ziehung~~

iii) ohne Zurücklegen, mit B.d.R.

Sind $w \geq 4$ und $s \geq 4$, so sind alle Möglichkeiten wie unter i) möglich.

Ist $w < 4$ oder $s < 4$, so ist $w + s \geq 4$ die untere Grenze für die Gesamtzahl der Kugeln

Gilt $w + s = 4$, so werden alle 4 Kugeln gezogen. Dann ist die Anzahl der versch. Ziehungen die Anzahl der Permutationen $\frac{4!}{w!\,s!}$

In den anderen Fällen ist eine allgemeine Lösung nicht anzugeben.

iv) ohne Zurücklegen, ohne B.d.R.

Dann kann man jede Ziehung nach eigener Vorstellung ordnen. Wir ordnen die weißen Kugeln an den Anfang.

Dann gibt es für $s \geq 4$ und $w \geq 4$ 5 Ziehungen

Ist $s < 4$ und $w \geq 4$, so gibt es $1+s$ Ziehungen

ist $s \geq 4$ und $w < 4$, " " " $1+w$ "

ist $s < 4$ und $w < 4$, " " " $s+w-3$ "

Gibt es nicht 4 Ziehungen, sondern k Ziehungen, sind die Ergebnisse analog.

HAUSÜBUNGEN

3a) $\binom{49}{6} = 13.983.816$

b) Alle Tipps kosten $13.983.816 \cdot 0{,}75$ € $= 10.487.862$ €

also gut 10 Millionen €

c)

Gewinne	Anzahl	
6 Richtige	$\binom{6}{6}\binom{1}{0}\binom{42}{0} =$	1
5 R. mit Zuszahl	$\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0} =$	6
5 Richtige	$\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{42}{1} =$	252
4 R. mit Zuszahl	$\binom{6}{4}\binom{1}{1}\binom{42}{1} =$	630
4 Richtige	$\binom{6}{4}\binom{1}{0}\binom{42}{2} =$	12 915
3 R. mit Zusz.	$\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2} =$	17 220
3 Richtige	$\binom{6}{3}\binom{1}{0}\binom{42}{3} =$	229 600

d)

2 Richtige	$\binom{6}{2}\binom{43}{4} =$	1.851.150
1 Richtig	$\binom{6}{1}\binom{43}{5} =$	5.775.588
0 Richtige	$\binom{6}{0}\binom{43}{6} =$	6.096.454
		13.983.816 $= \binom{49}{6}$

13.723.192 Tipps ohne Gewinn

Fortsetzung 2c)

	Anz. d. Tipps	· Gewinn pro Tipp	= Gewinn i. d. Klasse
6R	1 ·	399 122,80€ =	399 122,80€
5RZ	6 ·	30 545,10€ =	183 270,60€
5R	252 ·	2 734,60€ =	689 119,20€
4RZ	630 ·	119,70€ =	75 411,00€
4R	12 915 ·	39,50€ =	510 142,50€
3RZ	17 220 ·	19,10€ =	~~32 890,~~ 328 902,00 €
3R	229 600 ·	9,40€ =	2 158 240,00 €
			4 344 208,10€

Also hätte der „Monstertipp" ca 4,3 Mio € gebracht. Mit Sicherheit! Es ist dann kein Glücksspiel. Investiert haben wir ca. 10,5 Mio €. Folglich hätten wir ca. 6,2 Mio € Verlust gemacht

mit Sicherheit, egal welche 6 Zahlen gezogen worden sind.
Allein der Jackpot von ca. 13,6 Mio € hätte das ausgleichen können - aber nur mit einer Chance von 1:10

4. a) 1, 1, 2, 4, 5, 6 $n=6$ → oo|o||o|o|o
1, 1, 1, 5, 5, 5, 7 $n=7$ → ooo||||ooo||o

b) |ooo||oo| → 2, 2, 2, 4, 4
||ooooo|||oo| → 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6

5. Es gibt für die Einteilung von 9 Schülerplätzen in Dreier- oder Zweiergruppen zwei Möglichkeiten:

(A) 3 Dreiergruppen

(B) 1 Dreiergruppe, 3 Zweiergruppen.

Zuerst werden die Plätze von 1 bis 9 nummeriert, danach werden aus ihnen in der bei (A) bzw. (B) geforderten Weise zuerst die Dreiergruppen und bei (B) dann die Zweiergruppen gebildet und anschließend die Schüler verteilt.

Unter den 9! möglichen Verteilungen der Schüler auf die Plätze 1 bis 9 kommen dabei Gruppenbildungen mehrfach vor: Jede Dreiergruppe wird 3! = 6-mal gezählt, jede Zweiergruppe wird zweimal gezählt.

Aber auch die Reihenfolgen der Dreier- und der Zweiergruppen sind ohne Bedeutung, d. h. diese können jeweils untereinander beliebig vertauscht werden und ergeben trotzdem jeweils die gleiche Gruppeneinteilung.

Für die Fälle (A) und (B) lassen deshalb die folgenden Vertauschungen die Gruppeneinteilung unverändert:

(A) 6^3 Vertauschungen innerhalb der Dreiergruppen und 3! = 6 Vertauschungen der Dreiergruppen untereinander,

(B) 6 Vertauschungen innerhalb der Dreiergruppe, 2^3 Vertauschungen innerhalb der Zweiergruppen und 3! = 6 Vertauschungen der Zweiergruppen untereinander.

Es gibt also

für (A) $\frac{9!}{6^3 \cdot 3!} = 280$ Möglichkeiten,

für (B) $\frac{9!}{6 \cdot 2^3 \cdot 6} = 1\,260$ Möglichkeiten.

Damit gibt es insgesamt 1540 Möglichkeiten, um Gruppen entsprechend der Aufgabenstellung zu bilden.

6. Das Verteilen der Karten geschieht natürlich <u>ohne</u> Zurücklegen. Das Ergebnis wird ohne Berücksichtigung der Reihenfolge betrachtet, denn jeder Spieler darf nach dem Geben die Karten nach Belieben ordnen.
Also: k Karten erhalten von n: $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

1. Der erste Spieler bekommt 6 von 60 Karten, der zweite 6 von den verbliebenen 54, der dritte 6 von den verbliebenen 48.

2. Die 60 Karten werden neben einander gelegt (60-Tupel). Unter jede Karte wird 1, 2, 3 oder M geschrieben für den 1., 2., 3. Spieler oder den Reststapel in der Mitte. Dann ist jede Kartenverteilung ein 60-Tupel aus 6 Einsen 6 Zweien 6 Dreien und 42 Ms. Alle Permutationen sind dann der angegebene Bruch.

3. Man wählt erst 18 Karten aus, die verteilt werden sollen. Diese 18 Karten werden dann an den 1. Spieler ~~, de~~ verteilt. Der 2. Spieler erhält 6 aus den verbliebenen 12 Karten, der 3. Spieler die letzten 6.

c) 1. umformen: $\binom{60}{6}\binom{54}{6}\binom{48}{6} = \frac{60!}{6!\,\cancel{54!}} \cdot \frac{\cancel{54!}}{\cancel{6!}\,\cancel{48!}} \cdot \frac{\cancel{48!}}{6!\,42!} = 2.$

3. umf.: $\binom{60}{18} \cdot \binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6} = \frac{60!}{\cancel{18!} \cdot 42!} \cdot \frac{\cancel{18!}}{6!\,\cancel{12!}} \cdot \frac{\cancel{12!}}{6!\,6!} \cdot \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,0!} = 2.$

(Beachte $0! = 1$)

7. $xa^2 + yb^2 = c(|CM|^2 + xy)$

Auflösen nach $|CM|^2$

$$\frac{x}{c} a^2 + \frac{y}{c} b^2 = |CM|^2 + xy$$

$$|CM|^2 = \frac{x}{c} a^2 + \frac{y}{c} b^2 - xy$$

$\frac{x}{c} = \phi$ Da $\frac{x}{c} + \frac{y}{c} = \frac{c}{c} = 1$, gilt

$\phi + \frac{y}{c} = 1$ $\quad \frac{y}{c} = 1 - \phi$

$$|CM|^2 = \phi a^2 + (1-\phi) b^2 - \phi c \cdot (1-\phi) c$$
$$= \phi a^2 + (b^2 - \phi c^2)(1-\phi)$$