

10. Übung Lösungsskizzen

1. a) Permutation von 5 Dingen, davon 2 gleich
 $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Die Liste umfasst also 60 Zahlen

- b) Schreibt man eine 2 fest a.d. 1. Stelle, so bleiben noch 4 verschiedene Ziffern $\rightarrow 4! = 24$ Permutationen
Es beginnen 24 Zahlen mit 2.

- c) Schreibt man eine 3 fest a.d. 1. Stelle, so bleiben noch 4 Ziffern, von denen zwei gleich sind.
 $\rightarrow \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

- d) Analog zu b) c) 6 Zahlen 12...
7. 13224
8. 13242

13242 ist die 8. Zahl in der Liste

- e) 12 Zahlen mit 1....
24 Zahlen mit 2....
12 Zahlen mit 3....

Also 49. Zahl kleinste mit 4 am Anfang: 41223

Die 50. Zahl ist 41232

2. ~~Per~~ Sind n Personen im Raum, so bilden wir Paare von (verschiedenen) Personen.

1. Person wählen: n Möglichkeiten
2. Person wählen: $n-1$ Möglichk. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} 1. \text{ Person} \\ 2. \text{ Person} \end{array}} \right\} n(n-1) \text{ Möglichk.}$

Beim Anstoßen ist die Reihenfolge egal: Wenn A mit B anstößt, so hat auch schon B mit A angestoßen

Also: Bei n Personen gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ „Klings“.

2

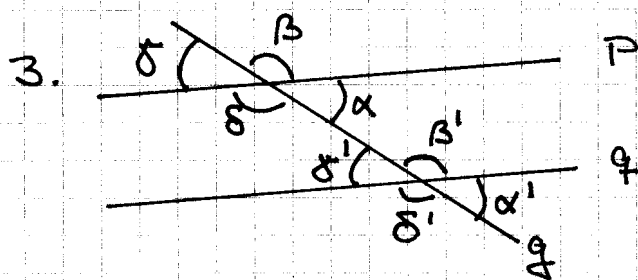
Probieren: $n=6 \quad \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

$$n=7 \quad \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$n=8 \quad \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

a) $25 = \frac{n(n-1)}{2}$ besitzt keine ganzzahlige Lösung für n .

b) Es müssen mindestens 8 Personen sein.



Eine Gerade g schneidet zwei weitere, p und q .

Stufenwinkel: $p \parallel q \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$
($\beta = \beta'$, ...)

Wechselwinkel (auch anschaulich „Z-Winkel“ genannt)

$$p \parallel q \Leftrightarrow \alpha = \delta' \quad \text{oder} \quad p \parallel q \Leftrightarrow \delta = \beta'$$

HAUSÜBUNGEN

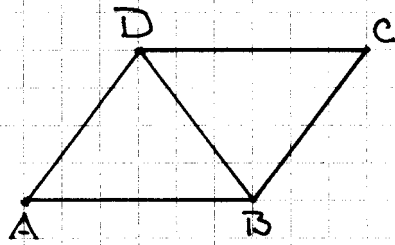
4. a) Umkehrung: „Wenn eine Zahl durch 2 und 3 teilbar ist, dann ist sie durch 12 teilbar“ (falsche Auss.)

b) Kontraposition: „Wenn eine Zahl nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar ist, dann ist sie (auch) nicht durch 12 teilbar“

c) Nicht-oder-Form: „Eine Zahl ist nicht durch 12 teilbar oder sie ist durch 2 und durch 3 teilbar“
(?? unverständlich)

teilbar und nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar." (natürlich eine falsche Aussage)

5.



Voraus.: $AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$
Man zeichnet eine Diagonale hier BD.

$\triangle ABD$

$\triangle BCD$

$$|BD| = |BD|$$

Tautologie

$$|\angle DBA| = |\angle BDC|$$

Wechselwinkel und $AB \parallel DC$

$$|\angle ADB| = |\angle CBD|$$

"

" $AD \parallel BC$

$\triangle ABD \cong \triangle BCD$ nach WSW

Also sind die übrigen entsprechenden Seiten gleich lang, also $|AB| = |CD|$ und $|AD| = |BC|$ $\square$

6. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1), \quad a \in \mathbb{R}$$

Beweis durch vollst. Induktion über n

Induktionsanf. $n=1$

$$a - 1 = (a - 1) \cdot a^0 \quad \checkmark$$

$$n=2: a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) \quad \checkmark \quad (3. \text{ Binom. Formel})$$

$$\text{Induktionsv.: } a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$\text{Induktionsbeh.: } a^{n+1} - 1 = (a - 1)(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1)$$

$$\text{Beweis: } a^{n+1} - 1 = a^{n+1} - a^n + \underbrace{a^n - 1}_{\text{Ind. Vor.}}$$

$$= a^n(a - 1) + (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)$$

$\rightarrow$

$(a-1)$ ausklammern

$$= (a-1)(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1) \quad \square$$

4

7. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

P,q - Formel

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}$$

$$\dots \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{4ab}{4}}$$

$$\dots \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}}$$

$$\dots \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

$$x = a$$

$$\text{oder} \quad x = b$$

Probe: $x = a$

$$\begin{aligned} & a^2 - (a+b)a + ab \\ &= a^2 - a^2 - ab + ab \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$x = b$

$$\begin{aligned} & b^2 - (a+b)b + ab \\ &= b^2 - ab - b^2 + ab \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$