

Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09
9. Übung, Lösungsskizzen

1. Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad n=5: \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \\ = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$$

$$n=6: \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \dots + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

allgemein: setze im Binom. Lehrsatz $a=b=1$

$$b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad n=5: 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$$

$$n=6: 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 32 - 32 = 0$$

allgemein: setze im Binom. Lehrsatz $a=-1 \quad b=+1$

$$c) \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n \quad n=5: 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 16 + 1 \cdot 32 \\ = 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243 = 3^5$$

$$n=6: 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 15 \cdot 16 + 6 \cdot 32 + 1 \cdot 64 \\ = 1 + 12 + 60 + 160 + 240 + 192 + 64 = 729 = 3^6$$

allgemein: setze im Binom. Lehrsatz $a=2 \quad b=1$

$$2. (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 \cdot x^0 + n \cdot x^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k \\ = (x+1)^n \quad = 1 + n \cdot x + x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{k-2}$$

Die Multiplikation mit x^2 macht für $x \ll 1$ den letzten Summanden vernachlässigbar klein.

$$1,02^4 = 1,08243216 \approx 1,08 = 1 + 4 \cdot 0,2$$

$$\text{absol. Fehler: } 1,08 - 1,08243216 = -0,00243216$$

$$\text{relat. Fehler: ca } 0,2\%$$