Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09

8. Übung, Lösungsskizzen

1. $10110110_2 = 2+4+16+32+128 = 182_{10}$

2er → 8er: man darf 3er-Gruppen von Ziffern zusammenfassen, da $2^3 = 8$

$\underbrace{010}_{2}\underbrace{110}_{6}\underbrace{110}_{6}{}_2 = 266_8$

2er → 16er: man darf 4er-Gruppen von Ziffern zusammenf.

$\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0110}_{6}{}_2 = B6_{16}$

$b=7$

$182 = 26 \cdot 7 + 0$

$26 = 3 \cdot 7 + 5$

$3 = 0 \cdot 7 + 3$

$182_{10} = 350_7$

$AC_{16} = 10 \cdot 16 + 12 = 172_{10}$

$b=2$:

$172 = 86 \cdot 2 + 0$

$86 = 43 \cdot 2 + 0$

$43 = 21 \cdot 2 + 1$

$21 = 10 \cdot 2 + 1$

$10 = 5 \cdot 2 + 0$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 0 \cdot 2 + 1$

$= 10101100_2$

In 3er-Gruppen zusammenfassen für 8er-System

$\underbrace{010}_{2}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}{}_2 = 254_8$

$b=7$

$172 = 24 \cdot 7 + 4$

$24 = 3 \cdot 7 + 3$

$3 = 0 \cdot 7 + 3$

$172_{10} = 334_7$

2. Wegen der Implikation direkt, muss man „A" und „B" umdrehen und nachschauen ob dort eine gerade Zahl steht.
Wegen der Kontraposition (äquivalente Aussage zur Implikation) „Wenn auf der anderen Seite keine gerade (= ungerade) Zahl steht, dann darf auf der Vorderseite nicht „A" und nicht „B" (= weder „A" noch „B") stehen". Muss man auch die „1" umdrehen und nachschauen, dass dort weder „A" noch „B" steht.
Man muss „C" und auch „2" nicht umdrehen, denn für diese Fälle legt weder die Implikation direkt noch die Kontraposition etwas fest. (ex falso quod libet)

HAUSÜBUNGEN

3. a) $53 = b^2 + 2b + 5$

$b^2 + 2b + 1 = 48 + 1$

$(b+1)^2 = 49$

$b+1 = +7$ oder $b+1 = -7$

$\underline{\underline{b = 6}}$ oder $b = -8$ keine sinnv. Lösung

Probe

$1 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 5$

$= 36 + 12 + 5 = 53$

ii

$177 = b^3 + 2b^2 + 2$

$b^3 + 2b^2 = 175$

b^3 darf nicht über 175 liegen

$\Rightarrow b \leq 5$

$b^3 \geq 88$, denn sonst passt b^3 2 Mal in 175

$\Rightarrow b \geq 5$ Also $\underline{\underline{b = 5}}$

(Mit Probieren schafft man es auch)

Probe: $1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2$

$= 125 + 50 + 2 = 177$

b)

$401_c = 2300_b \Rightarrow 4c^2 + 1 = 2b^3 + 3b^2$

$= (2b + 3) b^2$

$4c^2+1$ hat also eine Quadratzahl als Teiler

Da 4 als Ziffer vorkommt, muss $c \geq 5$ sein

c	5	6	7	8	9
$4c^2+1$	101 prim	145 $= 5 \cdot 29$	197 prim	257 prim	325 $= 5^2 \cdot 13$

Danach kann $c = 9$ und $b = 5$ eine Lösung sein.

Probe: $(2b + 3) \cdot b^2 = (2 \cdot 5 + 3) \cdot 5^2 = 13 \cdot 5^2$ ✓

Also ist eine Lösung $c = 9$ $b = 5$

Es ist offen, ob es noch weitere Lösungen gibt.

4. a) $1ABCD_{18} > DFC9_{18}$

Bei gleicher Basis ist die Zahl mit der größeren Stellenzahl die größere.

b) $121212_9 > 121212_8$

Bei gleichen Ziffern ist die Zahl im größeren Basissystem die größere

c) $BA5_{12} < BA5_{16} < AC84_{16}$

(Kombination der beiden Regeln a) und b))

$$\underbrace{12}\,\underbrace{21}\,\underbrace{22}_3$$

$$= 5\ 7\ 8_9 \quad \text{und} \quad 578_9 > 122_9$$

5. a) 12120_b ist durch $b-1$ teilbar, wenn die QS durch $b-1$ teilbar ist.

Die QS ist 6. 6 hat die Teiler 1, 2, 3, 6

$b-1=1 \Rightarrow b=2$ Widerspruch, da die Ziffer 2 vorkommt

$b-1=2 \Rightarrow b=3$ $12120_3 = 150_{10} = 2\cdot 75$ ✓

$b-1=3 \Rightarrow b=4$ $12120_4 = 408_{10} = 3\cdot 116$ ✓

$b-1=6 \Rightarrow b=7$ $12120_7 = 3150_{10} = 6\cdot 525$ ✓

b) 12120_b ist in jedem Basissystem durch b teilbar

Beispiele: $12120_3 = 150_{10} = 3\cdot 50$

$12120_4 = 408_{10} = 4\cdot 102$

$12120_{10} = 10\cdot 1212$

c) 12120_b ist durch $b+1$ teilbar, wenn die alternierende QS durch $b+1$ teilbar ist.

altern. QS ist $0-2+1-2+1=-2$

2 hat die Teiler 1 und 2

$b+1=1 \Rightarrow b=0$ Widerspruch

$b+1=2 \Rightarrow b=1$ "

Also ist 12120_b in keinem Basissystem durch $b+1$ teilbar.

6 a) $(b^5 - ab^4 + a^2b^3 - a^3b^2 + a^4b - a^5)(b+a)$

$= b^6 - ab^5 + a^2b^4 - a^3b^3 + a^4b^2 - a^5b$

$\quad + ab^5 - a^2b^4 + a^3b^3 - a^4b^2 + a^5b - a^6$

$= b^6 - a^6$

b) $(b^5 + ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5)(b+a)$

$= b^6 + ab^5 + a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2 + a^5b$

$\quad - ab^5 - a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2 + a^5b + a^6$

$= b^6 - a^6$