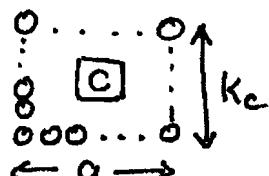
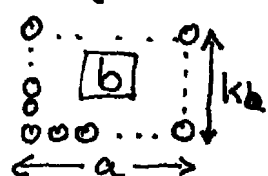


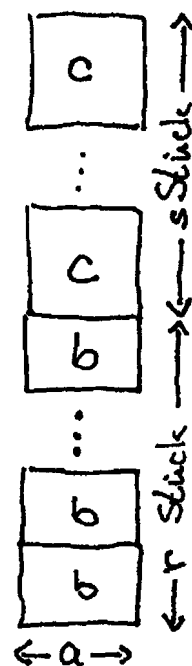
1. a) ab bedeutet im Punktemuster, dass b als Rechteck mit der Breite a und der Höhe k_b dargestellt werden kann.



Entsprechend
wird c dargestellt

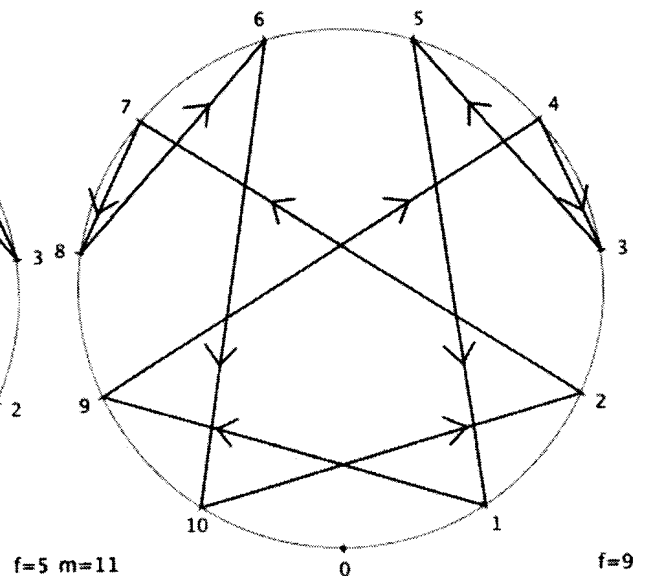
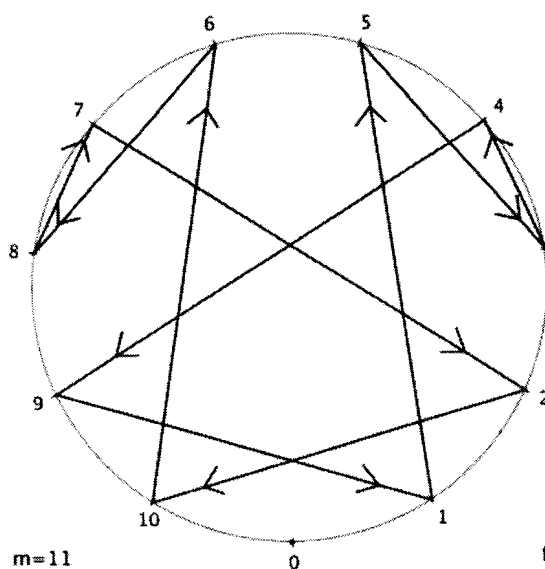
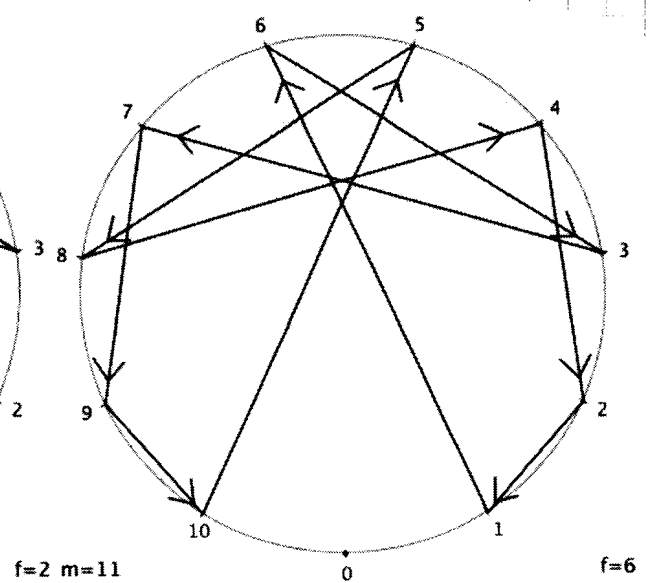
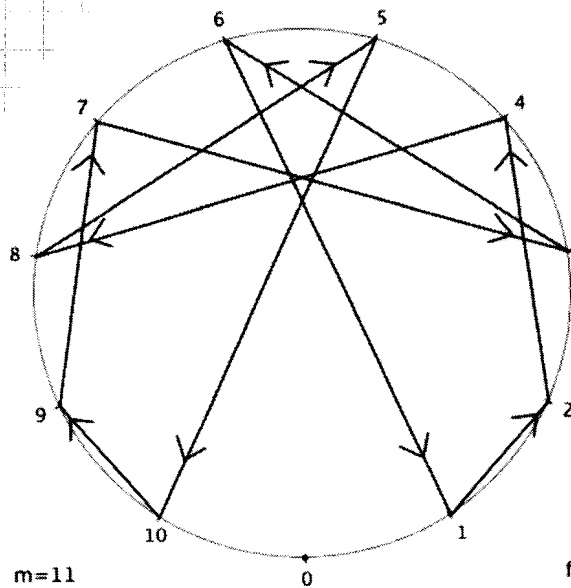
$a|b+c$ bedeutet im allgem. Punktemuster, dass $b+c$ als Rechteck der Breite a und beliebiger Höhe dargestellt werden kann, das „oben glatt“ ist. Das ist hier der Fall, man muss ja nur beide Rechtecke übereinander legen.

- b) b und c sind wieder Rechtecke der Breite a mit „glatter Oberkante“. Dann kann man beliebig viele von b und beliebig viele von c übereinander legen und das Gesamtrechteck ist immer noch „oben glatt“.



- 2 a) Abgeschlossenheit: A ist bezüglich der Multiplikation nicht abgeschlossen, denn $3 \cdot 3 = 9 \notin A$
b) Assoziativität: Die Multiplikation ist auf $\mathbb{N}$ assoziativ, also auch auf $A \subset \mathbb{N}$
c) neutrales Element: 1 ist neutrales Element
d) inverses Element: $\frac{1}{3} \leftrightarrow 3$ und $1 \leftrightarrow 1$

3. a)



Für 2 und 6 gilt : $2 \cdot 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$

Für 5 und 9 gilt : $5 \cdot 9 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$

b) Zeichnet man die Diagramme, so werden in beiden die gleichen Punkte verbunden. Wird in dem einen (a) n mit r verbunden $n, r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, so auch im anderen. Die Pfeile zeigen aber im zweiten Diagramm in die entgegengesetzte Richtung

Also $n \xrightarrow{\cdot a} r \quad r \xrightarrow{\cdot b} n$

formal n verbunden mit r , $n \cdot a = k \cdot m + r$

r verbunden mit n , $r \cdot b = k' \cdot m + n$

Seien $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ mit $a \cdot b \equiv 1 \pmod m$

Sei $n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Dann lässt sich $n \cdot a$ zerlegen in

$$n \cdot a = k \cdot m + r, \quad r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

$$\text{Dann gilt } r \cdot b = k' \cdot m + n$$

c) Beweis

Wir betrachten $r \cdot b$. Aus der Voraussetzung $n \cdot a = k \cdot m + r$ folgt durch Multiplikation mit b :

$$n \cdot ab = k \cdot m \cdot b + r \cdot b, \text{ also } r \cdot b = n \cdot ab - k \cdot mb$$

$$\text{Aus } ab \equiv 1 \pmod m \text{ folgt } ab = \ell \cdot m + 1$$

$$\text{Einsetzen: } r \cdot b = n \cdot (\ell \cdot m + 1) - k \cdot mb$$

$$= \ell n \cdot m + n - k \cdot b \cdot m$$

$$= \underbrace{(\ell n - kb)}_{k'} m + n$$

$$\text{Also } r \cdot b = k' \cdot m + n \quad \square$$

4. a) $(1, 2, 3, 4, 5)$ ist ein 5-Tupel, aber kein 8-Tupel.

b) $\{$ ist $(3, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ ein Element von M ,
so haben die Zahlen folgende Bedeutung:

$$(3, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

Im Tupel kommen 3 Nullen vor ✓

Im Tupel kommen 3 Einsen vor ✓

Im Tupel kommt 1 Zwei vor f

$$\text{Beurteilung in Kurzform: } \begin{matrix} (3, & 3, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0) \\ \begin{smallmatrix} \times \\ 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 2 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 3 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 4 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 5 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 6 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \times \\ 7 \end{smallmatrix} \\ \checkmark & \checkmark & \dagger & \dagger & \dagger & \checkmark & \checkmark & \checkmark \end{matrix}$$

Also ist das Tupel kein Element von M .

4c) x steht für die Anzahl der Dreien. Die ist 0.
Zudem fordert die 4 für n_0 , dass 4 Nullen
vorkommen müssen.

4

5. a) Der Rest r kann 0, 1, 2 oder 3 sein

$$\begin{array}{llll} b) & n \equiv 0 \pmod{4} & n \equiv 1 \pmod{4} & n \equiv 2 \pmod{4} & n \equiv 3 \pmod{4} \\ & n^2 \equiv 0 \pmod{4} & n^2 \equiv 1 \pmod{4} & n^2 \equiv 0 \pmod{4} & n^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{array}$$

Eine Quadratzahl hat bei Division durch 4 den
Rest 0 oder 1.

c) $x^2 + y^2$ kann dann die Divisionsreste 0, 1 oder 2
haben. $99 \dots 9$ hat aber den Divisionsrest 3.

6. $x = \sqrt{-(a+1) + \sqrt{2a+1}}$ einsetzen in
 $x^4 + 2(a+1)x^2 + a^2$

$$\begin{aligned} &= (-(a+1) + \sqrt{2a+1})^2 + 2(a+1)(-(a+1) + \sqrt{2a+1}) + a^2 \\ &= \underbrace{(a+1)^2} - \underbrace{2(a+1)\sqrt{2a+1}} + (2a+1) - \underbrace{2(a+1)^2} + \underbrace{2(a+1)\sqrt{2a+1}} + a^2 \\ &= -(a+1)^2 + 2a+1 + a^2 \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$x = -\sqrt{-(a+1) - \sqrt{2a+1}}$ einsetzen in
 $x^4 + 2(a+1)x^2 + a^2$

$$\begin{aligned} &= (-(a+1) - \sqrt{2a+1})^2 + 2(a+1)(-(a+1) - \sqrt{2a+1}) + a^2 \\ &= \underbrace{(a+1)^2} + \underbrace{2(a+1)\sqrt{2a+1}} + (2a+1) - \underbrace{2(a+1)^2} - \underbrace{2(a+1)\sqrt{2a+1}} + a^2 \\ &= -(a+1)^2 + 2a+1 + a^2 \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$