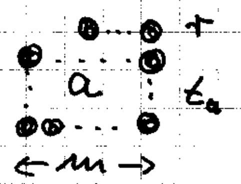
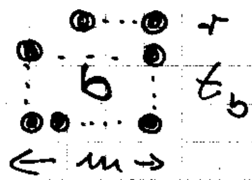
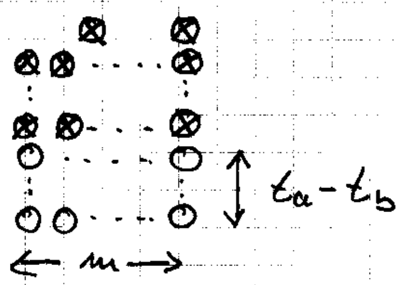
Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09

5. Übung, Lösungsskizzen

1. 



$a \equiv b \mod m$ bedeutet, dass die unvollständige Punktereihe für a und b gleich viele Punkte enthält.



Zieht man beide voneinander ab, so wird die unvollständige Punktreihe vollständig beseitigt. Es bleiben dann vollständige Reihe übrig, also Vielfache von m.

2. 1. Schritt: Division $4839267 : 38429 \approx 125{,}927\ldots$

also ist $k = 125$

2. Schritt: Multiplikation $38429 \cdot 125 = 4803625$

3. Schritt: Subtraktion $r = 35642$

Also $4839267 = 125 \cdot 38429 + 35642$

HAUSÜBUNGEN

3. Beweis „$\Rightarrow$"

$\Delta SF_1P \qquad \Delta SPF_2$

$|\sphericalangle F_1SP| = |\sphericalangle PSF_2|$, da P auf der Winkelhalbierenden

$|SP| = |SP|$ Tautologie

$|\sphericalangle PF_1S| = |\sphericalangle SF_2P| = 90°$, da Lot von P

$\Delta SF_1P \cong \Delta SPF_2$ nach SWW

Also sind die entsprechenden Seiten $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ gleich lang. $\square$

"$\Leftarrow$" $\triangle SF_1P \quad \triangle SPF_2$

$|PF_1| = |PF_2|$ laut Vorauss.

$|SP| = |SP|$ Tautologie

$|\sphericalangle PF_1S| = |\sphericalangle SF_2P| = 90°$ da Lot von P

$\triangle SF_1P \cong \triangle SPF_2$ nach SsW

(Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, ist immer die längste Seite eines Dreiecks)

Also sind auch die beiden entsprechenden Winkel $\sphericalangle FSP$ und $\sphericalangle PSF_2$ gleich groß.

Das bedeutet, dass die Gerade SP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ASB$ ist. □

4 a. $1000 = 24 \cdot 41 + 16$ 41 Tage 16 Std

16 Uhr $\xrightarrow{+16}$ nächster Tag 8 Uhr

16. 11. $\xrightarrow{+41}$ 57. 11. ist 27. 12.

$\Rightarrow$ 28. 12. 8 Uhr

b. $1000 = 2 \cdot 365 + 270$

Da 2008 Schaltjahr ist:

16. 11. 2007 $\xrightarrow{+366}$ 16. 11. 2008 $\xrightarrow{+365}$ 16. 11. 2009

16. 11. 2009 $\xrightarrow{+15}$ 1. 12. 2009 $\xrightarrow{+31}$ 1. 1. 2010

	Jan	Feb	März	April	Mai	Juni	Juli
	31	28	31	30	31	30	31
Rest 223	192	164	133	103			12

~~[illegible]~~ 12. August 2010

(so etwas kann man in Excel nachrechnen)

5. a) $n = 42$

linke Seite: $\sum_{k=1}^{84} k = \frac{84 \cdot 85}{2} = 3570$

rechte Seite: $3 \sum_{k=1}^{42} k = 3 \cdot \frac{42 \cdot 43}{2} = 2709$

$\sum_{k=1}^{41} k = \frac{41 \cdot 42}{2} = 861$

$+ \; 3570$ ✓

b) n allgemein

linke Seite $\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = n(2n+1)$

rechte Seite $3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(n\left(\frac{3}{\cancel{2}}(n+1) + n - 1\right)\right)$

$= \frac{n}{2}(4n + 2)$

$= n(2n+1)$ ✓

c) Ind. Anfang $n = 2$

$\sum_{k=1}^{4} k = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \qquad 3 \cdot \sum_{k=1}^{2} k + \sum_{k=1}^{1} k = 3 \cdot 3 + 1 = 10$ ✓

Ind Vorauss: $\sum_{k=1}^{2n} k = 3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k$

Ind Behaupt: $\sum_{k=1}^{2(n+1)} k = 3 \sum_{k=1}^{n+1} k + \sum_{k=1}^{n} k$

Ind Beweis

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} k}_{\text{Ind. Vorauss.}} + \underbrace{2n+1 + 2n+2}$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k + 4n + 3$$

zerlegen

$$= 3 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k + 3(n+1) + n$$

$\rightarrow$

$$= 3\left[\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} k + n\right]$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n+1} k + \sum_{k=1}^{n} k \quad \square$$

Interessanterweise braucht man bei der vollständigen Induktion nicht die Summenformel (1).

6. Termumformung

$$y = \frac{1}{2}x^3 - 2x \qquad x = \frac{u}{2} - 3$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}-3\right)^3 - 2\left(\frac{u}{2}-3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4} - 3u + 9\right)\left(\frac{u}{2}-3\right) - u + 6$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{8} - \frac{3}{2}u^2 + \frac{9}{2}u - \frac{3}{4}u^2 + 9u - 27\right) - u + 6$$

$$= \frac{u^3}{16} - \frac{9}{8}u^2 + \frac{27}{4}u - \frac{27}{2} - u + 6$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{16}u^3 - \frac{9}{8}u^2 + \frac{23}{4}u - \frac{15}{2}}}$$