Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09

Übung 3, Lösungsskizzen

---

1. a) „nicht-oder" Beeil dich nicht (oder) sonst bekommst du noch den Zug". (Klingt eher ironisch)

Kontrapos: Wenn du den Zug nicht bekommen hast, dann hast du dich auch nicht beeilt.

Verneinung: Ich habe mich beeilt und (trotzdem) nicht den Zug bekommen.

b) „nicht-oder" Eine Zahl ist nicht durch 6 teilbar oder sie ist gerade. (?? sehr seltsam, unverständ.)

Kontrapos.: Wenn eine Zahl nicht durch 2 teilbar ist, dann ist sie (auch) nicht durch 6 teilbar.

Verneinung: Eine Zahl ist durch 6 teilbar und (trotzdem) nicht durch 2 teilbar. (Da ist in der Tat für keine Zahl wahr.)

c) „nicht-oder": Heute nachmittag scheint die Sonne nicht oder ich bin im Schwimmbad. (Naja)

Kontrapos: Wenn ich ~~war~~ nicht im Schwimmbad bin dann scheint (auch) nicht die Sonne.

Verneinung: Die Sonne scheint und ich bin (trotzdem) nicht im Schwimmbad.

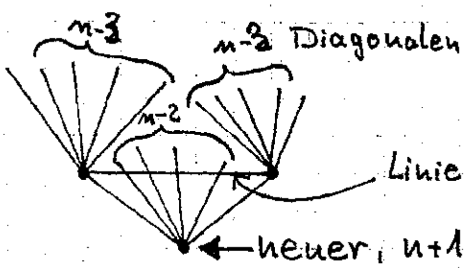
d) „nicht-oder": Sie ~~haben~~ sind unter 25 oder haben keinen gültigen Führerschein oder können das Auto mieten. (Würde ich nicht verstehen)

Kontrapos.: Wenn ich das Auto nicht bekomme dann war ich unter 25 oder hatte keinen gültigen Führerschein.

Verneinung: Ich bin über 25 und habe einen gültigen Führerschein und bekomme (trotzdem) nicht das Auto.

2. $A(n)$: $V(n) = D(n) + n$

$A(n+1)$: $V(n+1) = D(n+1) + (n+1)$



Man fügt zu einem n-Eck einen n+1. Punkt hinzu und zieht alle Verbindungslinien zu den anderen n Punkten

$V(n+1) = V(n) + n$

Von dem neuen Punkt gehen n-2 Diagonalen aus.
Eine bisher außen liegende Verbindungslinie wird zur Diagonalen. Also $D(n+1) = D(n) + n - 2 + 1 = D(n) + n - 1$

$\Rightarrow D(n) = D(n+1) - n + 1 \quad (*)$

Also: $V(n+1) = V(n) + n$

$\quad \overset{\text{Ind. Vor.}}{=} D(n) + n + n$

$\quad = D(n+1) - n + 1 + n + n$ wegen $(*)$

$\quad = D(n+1) + n + 1$

HAUSÜBUNGEN

3. Die gegebene Regel direkt prüfen:
A und B umdrehen und nachschauen, dass wirklich keine „5" steht.
Kontraposition: Wenn die Ziffer „5" ist, dann zeigt die andere Seite nicht A und nicht B."
(auch „weder A noch B")

->

d.h. die 5 muss umgedreht werden und auf der Rückseite darf weder „A" noch „B" stehen.

4

a) $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

Ind.Vor.

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$ $\quad \frac{1}{6}(n+1)$ auskl.

$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$

$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]$ ausmultiplizieren

$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ q.e.d.

b) $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$

Ind. Vor.

$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

5 a. richtig (Distributivgesetz) bzw. ausklammern von a

b. falsch Für das Quadrieren gilt nicht ein Distributivgesetz Beisp.: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

c. richtig Man darf (bei endlichen) Summen die Summanden passend umsortieren
Bsp.: $1+2+3+1^2+2^2+3^2 = (1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)$

d. falsch $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$

6. gilt nur für gerade n

$\left(1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} 2(i+1)\right) + \left(1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-1)\right)$ Indextransformation außen +1, innen −1

$= \left(1+\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} 2i\right) + \left(1+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-1)\right)$

1+1=2 , 2 wird als erster Summand in die erste Summe gezogen

$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2i + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-1)$

Summe der geraden und Summe der ungeraden Zahlen ergibt Summe aller Zahlen

$= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

7. $$\sum_{k=1}^{n}(a+k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a^2+2ak+k^2)$$

umordnen

$$= \sum_{k=1}^{n} a^2 + \sum_{k=1}^{n} 2ak + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

ausklammern

$$= a^2 \sum_{k=1}^{n} 1 + 2a \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

ersten beiden Summen ausrechn.

$$= a^2 \cdot n + \cancel{2}a \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + \sum k^2$$

an ausklammern

$$= an(a+n+1) + \sum_{k=1}^{n} k^2$$