

Dr. Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 08/09
Übung 1, Lösungsskizzen

1.

a) $278 \cdot 7 = 1946$ $194 - 2 \cdot 6 = 182$

$18 - 2 \cdot 2 = 14$

$925 \cdot 7 = 6475$ $647 - 2 \cdot 5 = 637$

$63 - 2 \cdot 7 = 49$

$876 \cdot 7 = 6132$ $613 - 2 \cdot 2 = 609$

$60 - 2 \cdot 9 = 42$ $(4 - 2 \cdot 2 = 0)$

$783 \cdot 7 = 5481$ $548 - 1 \cdot 2 = 546$

$54 - 2 \cdot 6 = 42$

b) $528 \cdot 7 + 2 = 3698$ $369 - 2 \cdot 8 = 353$

$35 - 2 \cdot 3 = 29$

$246 \cdot 7 + 3 = 1725$ $172 - 2 \cdot 5 = 162$

$16 - 2 \cdot 2 = 12$

$613 \cdot 7 + 5 = 4296$ $429 - 2 \cdot 6 = 417$

$41 - 2 \cdot 7 = 27$

Die Rechnung^{in a)} führt auf immer kleinere Zahlen, die durch 7 teilbar sind. Man kann die Rechnung abbrechen, wenn man auf eine Zahl kommt, von der man auswendig weiß, dass sie durch 7 teilbar ist.

Größere Zahlen: $48216 \cdot 7 = 337512$

$33751 - 2 \cdot 2 = 33747$ $3374 - 2 \cdot 7 = 3360$

Nullen am Ende kann man sofort streichen

$33 - 2 \cdot 6 = 21$

2c)

Eine nicht durch 7 teilbare Zahl:

$6273 \cdot 7 + 5 = 43916$ $4391 - 2 \cdot 6 = 4379$

$437 - 2 \cdot 9 = 419$ $41 - 2 \cdot 9 = 23$ nicht durch 7 teilbar

d) Die Rechenoperation bedeutet, dass man gerade so oft 21 abzieht, dass eine durch 10 teilbare Zahl entsteht (0 am Ende). Ist die Ausgangszahl durch 7 teilbar, so ist auch die veränderte Zahl durch 7 teilbar, denn das abgezogene Vielfache von 21 ist es auch.

Ist die Ausgangszahl nicht durch 7 teilbar, so sind auch alle Zwischenergebnisse nicht durch 7 teilbar.

2. Übersicht über die Gäste (Anfangsbuchst.)

und Lösung: + kommt, - kommt nicht, ? unklar

Kurzform der Sätze:

1. $H \Leftrightarrow P$ 2. $J +$ 3. $P \Rightarrow A$

4. entweder C oder H 5. $S -$

6. $J \text{ und } S \Rightarrow \text{nicht } Z$ 7. $S \Leftrightarrow H$

P	H	J	S	A	C	Z
-	-	+	-	?	+	?

3. a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $a, c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ $a, c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
oder $k \in \mathbb{N}$

c) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$

e) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $a \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

4

3

a)

$$\begin{array}{r}
 743 \\
 - 347 \\
 \hline
 396
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 963 \\
 - 369 \\
 \hline
 594
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 954 \\
 - 459 \\
 \hline
 495
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 655 \\
 - 556 \\
 \hline
 099
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 990 \\
 - 099 \\
 \hline
 891
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 981 \\
 - 189 \\
 \hline
 792
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 972 \\
 - 279 \\
 \hline
 693
 \end{array}$$

$\xrightarrow{-1}$ $\xrightarrow{+1}$

- Die Differenzen haben eine 9 als Zehnerziffer, Hunderter- und Einerziffer ergänzen sich zu 9

- Von Rechenschritt (ab der 1. Differenz) zu Rechenschritt nimmt die Einerziffer um 1 zu, die Hunderterziffer um 1 ab.

b) Wegen $a < b < c$ ist die größte Zahl

$$100c + 10b + a$$

und die kleinste

$$100a + 10b + c$$

Differenz:

$$100(c-a) + (a-c)$$

Da $a < c$, ist $a-c$ negativ, also keine Ziffer. „1 im Übertrag“ ergibt

$$\begin{aligned}
 &100(c-a) - 10 + 10 + a - c \\
 &= 100(c-a) - 10 + 10 - (c-a)
 \end{aligned}$$

Nun ist die Zehnerziffer -1, also noch ein

Übertrag:

$$\begin{aligned}
 &\frac{100(c-a) - 100}{\text{Hunderter}} + \frac{10 \cdot 10 - 10}{\text{Zehner}} + \frac{10 - (c-a)}{\text{Einer}} \\
 &= 100 \cdot (c-a-1) + 10 \cdot 9 + 10 - (c-a)
 \end{aligned}$$

Also: Hunderterziffer $h = c-a-1$

Zehnerziffer

$$z = 9$$

Einerziffer

$$e = 10 - (c-a)$$

4 b

Fort. An den konkreten Beispielen hatten wir $h+e=9$ festgestellt. Nachrechnen: $h+e = c-a-1 + 10-(c-a)$
 $= c-a-1+10-c+a = 9$

Hausübungen

5 a) $U = \{u \mid u = 2i-1, i \in \mathbb{N}\}$ kurz: $u = 2i-1$

b) $R = \{r \mid r = 6m+4, m \in \mathbb{N}_0\}$ kurz: $r = 6m+4$

c) $P = \{a \mid a = k^2+1, k \in \mathbb{N}_0\}$ kurz: $a = k^2+1$

d) $A = \{z \mid z = 10a + (a+3), a \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}\}$

kurz: $z = 10a + (a+3)$

6. Beispiel: 7, 4, 3, 2

$\begin{array}{r} 7432 \\ -2347 \\ \hline 5085 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8550 \\ -0558 \\ \hline 7992 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9972 \\ -2799 \\ \hline 7173 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7731 \\ -1377 \\ \hline 6354 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6543 \\ -3456 \\ \hline 3087 \end{array}$
$\begin{array}{r} 8830 \\ -0378 \\ \hline 8352 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8532 \\ -2358 \\ \hline 6174 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7641 \\ -1467 \\ \hline 6174 \end{array}$		

Alle Differenzen sind durch 9 teilbar

Weitere gemeinsame Teiler gibt es nicht, denn

$7173 = 9 \cdot 797$ 797 ist Primzahl und 797 ist nicht Teiler von 7992.

5

7.	A	B	C	A oder (B und C) (A oder B) und (A od. C)				
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f
				2.	1.	3.	5.	4.
				↑			↑	

Die 2. und die 5. Spalte sind gleich.

Also sind beide Aussageformen gleichwertig.

8. Argumentativ:

Die Quersumme ist die Einerziffer plus ein Mal die Zehnerziffer. Die zweistellige Zahl ist die Einerziffer plus zehn Mal die Zehnerziffer. Da die Zehnerziffer mindestens 1 ist, ist die Zahl größer als die Quersumme.

Formal: Sei a die Zehner-, b die Einerziffer

Zahl n : $n = 10a + b$ Quersumme q : $q = a + b$

Behauptung: $n > q$

Beweis: Da $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ gilt: $10a > a$

$$\Rightarrow 10a + b > a + b$$

$$\Rightarrow n > q \quad \text{q.e.d.}$$