# 12. Übung
# Vollständige Induktion

## Präsenzübungen (29./30./31. Januar)

Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen immer mit vollständiger Induktion. Zu manchen Aussagen kann der Beweis auch anders geführt werden. Darüber sollten Sie auch kurz nachdenken, es ist hier aber nicht die wesentliche Anforderung.

1. Eine Menge mit n Elementen hat $2^n$ Teilmengen.
2. Die Anzahl der Permutationen von *n* Dingen ist *n*!.
3. Im Pascalschen Dreieck ist die Summe aller Zahlen einer Zeile immer eine Zweierpotenz.

## Hausübungen (Abgabe: Do, 1.2.07)

4. Beweisen Sie die Summenformeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ :
   a. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$
   b. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
5. Beweisen Sie die nachfolgenden Teilereigenschaften durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ :
   a. $8 \mid 3^{2n} - 1$
   b. $3 \mid 2^{3n} - 5^n$
6. In einem *n*-Eck ist die Anzahl aller Verbindungslinien $V(n)$ zwischen den Punkten um *n* größer als die Anzahl der Diagonalen $D(n)$. Kurz $V(n) = D(n) + n$.

## Extraaufgabe

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch: $f_{n+1} = f_n + f_{n-}1$ mit den Startwerten $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

Nun gibt es eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen (Formel von Binet):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Aufgabe: Beweisen Sie, dass die nach der Binet-Formel gebildeten $f_n$ die rekursive Definition $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ erfüllen.

Hilfestellung: Rechnen Sie durch schlichtes Ausmultiplizieren die folgende Umformung nach: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + 1 = \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$. Diese ist beim Beweis hilfreich.