Wintersemester 2006/07
Reimund Albers

8. Übung
Teilbarkeitsregeln, Primzahlen, Primfaktorzerlegung

Präsenzübungen (18./19./20. Dez.)

1. Wir betrachten die Menge $D = \{1\} \cup \{3, 6, 9, 12, ...\}$.
   In D definieren wir die Teilbarkeitsrelation $|_D$ durch :
   $\forall a, b \in D$ gilt: $a |_D b \Leftrightarrow \exists q \in D$ mit $b = qa$.
   Wie in $\mathbb{N}$ definieren wir in D: Eine Zahl $p \in D$ heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler hat.
   a. 3 ist die kleinste Primzahl in *D*. Begründen Sie, dass auch 6 eine Primzahl in *D* ist.
   b. Zählen Sie alle Primzahlen in *D* bis 48 auf.
   c. Beweisen Sie: $d \in D$ ist in $\mathbb{N}$ durch 9 teilbar $\Leftrightarrow$ d ist in *D* keine Primzahl.
   d. In *D* ist die Primfaktorzerlegung nicht eindeutig. Zeigen Sie das am Beispiel 108, indem Sie 108 in zwei verschiedene PFZ aufspalten.

Hausübungen (Abgabe: Do, 21.12.06)

2. Wir hatten systematisch den Teiler $t = 4$ untersucht und Teilbarkeitsregeln für die Basissysteme $b = 2$ bis $b = 11$ aufgestellt. Notieren Sie noch einmal diese Übersicht.
   a. Erläutern und begründen Sie, wie diese Tabelle fortgesetzt wird und warum es für $t = 4$ für jedes Basissystem eine einfache Teilbarkeitsregel gibt.
   b. Untersuchen Sie ebenso systematisch den Teiler $t = 5$. Hier kommt es vor, dass es in manchen Basissystemen keine einfache Teilbarkeitsregel gibt.

3. (Primzahllücken) Es sei $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ die (Ihnen sicher bekannte) Fakultät.
   a. Begründen Sie, warum die 19 aufeinander folgenden Zahlen 20!+2, 20!+3, ..., 20!+20 keine Primzahlen sind. Was sind jeweils die offensichtlichen Teiler?
   b. Konstruieren Sie eine Zahl *d*, die deutlich kleiner als 20! ist und die durch 2 und 3 und 4 und... und 19 und 20 teilbar ist. (*d*+2, *d*+3, *d*+4, ... , *d*+20 sind dann sicher keine Primzahlen.)
   c. Die Frage, ob *d*+23 eine Primzahl ist oder nicht verursacht eine mühsame Teilersuche. Welche Primzahlen müssen dabei als Teiler von *d*+23 getestet werden, welche nicht?
   d. Suchen Sie in einer Primzahlliste (z.B. der Excelliste, die Sie auf der Internetseite finden) die kleinsten beiden Primzahlen, zwischen denen 19 aufeinander folgende Nichtprimzahlen stehen?

4. Begründen Sie: Außer 3, 5, 7 gibt es keine drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, die alle drei Primzahlen sind (so genannte „Primzahldrillinge“).

5. Begründen/Widerlegen Sie:
   Für alle natürlichen Zahlen a,b gilt:
   a. ggT(a,b) = 1 $\Rightarrow$ a prim und b prim
   b. ggT(a,b) = 1 $\Rightarrow$ a prim oder b prim
   c. a prim und b prim $\Rightarrow$ ggT(a,b) = 1
   d. a prim oder b prim $\Rightarrow$ ggT(a,b) = 1

Extraaufgabe
Matheolympiade (421324, also 42. Olympiade, Oberstufe (13.Klasse), 2.Runde, 4.Aufgabe)
Man bestimme alle (im Dezimalsystem) 6-stelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) alle Ziffern sind gerade Zahlen,
(2) die Zahl ist durch 7 teilbar,
(3) die erste Ziffer ist doppelt so groß wie die zweite,
(4) die Quersumme der gesuchten Zahl ist 10.