Wintersemester 2006/07
Reimund Albers

5. Übung
Kongruenzrechnung, Teilerrelation

Präsenzübungen (27./28./29. Nov)

1. Begründen Sie durch ein allgemeines Punktemuster:
   a. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt : $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$
   b. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ und $r,s \in \mathbb{N}$ gilt : $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid rb+sc$

2. Beweisen Sie: $a \mid b \Leftrightarrow T_a \subseteq T_b$

3. Ist die Menge $A = \{1, \frac{1}{3}, 3\}$ mit der normalen Multiplikation eine Gruppe? Welche der vier Eigenschaften sind ggf. nicht erfüllt?

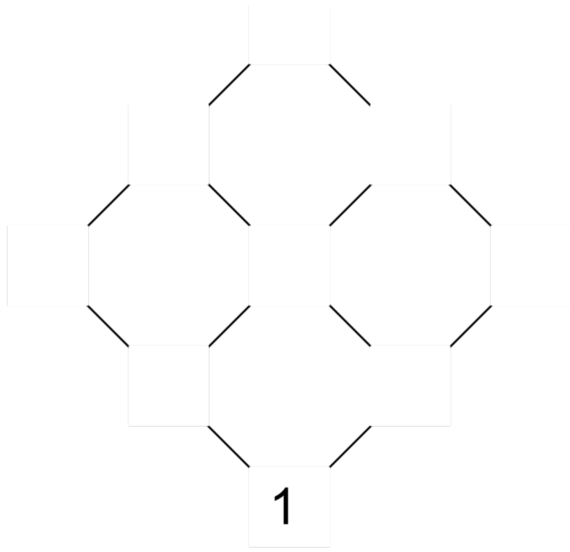
Hausübungen (Abgabe: Do, 30.11.06)

4. (zu den Kreisdiagrammen)
   Gilt für zwei Zahlen $a,b \in \{0,1,...,m-1\}$ die Kongruenz $ab \equiv 1 \bmod m$, so sind die Diagramme für die Multiplikation mit *a* und mit *b* gleich.
   a. Geben Sie dazu ein Beispiel für $m = 13$. Verwenden Sie die Kreisvorlagen aus dem Internet.
   (Hinweis: Zeichnen Sie Pfeile von der Ausgangszahl zur Ergebniszahl)
   b. Erläutern Sie durch Text und schließlich formal, was genau „...so sind die Diagramme für die Multiplikation mit *a* und mit *b* gleich." bedeutet. Zielen Sie auf eine beweisfähige, formale Aussage.
   c. Beweisen Sie die in b. formulierte Aussage.

5. Beweisen Sie formal:
   a. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt : $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$
   b. Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt : $a \mid b$ (und c beliebig) $\Rightarrow a \mid b \cdot c$

6. Bestimmen Sie jeweils die Teilermenge der nachfolgenden Zahlen und zeichnen Sie das zugehörige Diagramm.
   a. 81 b. 30
   c. 72 d. 675

7. Geben Sie eine Zahl und ihre Teilermenge an, so dass diese zu dem nebenstehenden Diagramm passt. Füllen Sie das Diagramm aus. (*Kommentar: Merken Sie, dass es sich hier (wieder einmal) um eine Umkehraufgabe handelt?*)



Extraaufgabe
Gerade gelaufene Matheolympiade, Regionalrunde, Klasse 10:
Bestimmen Sie alle Folgen F = ($n_0, n_1, \ldots, n_7$) von acht ganzen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für $i = 0, \ldots, 7$ gibt die Zahl n_i die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl i in der Folge ($n_0, n_1, \ldots, n_7$) an (so gibt beispielsweise n_3 an, wie viele der Zahlen aus der Folge ($n_0, n_1, \ldots, n_7$) gleich 3 sind).
Kommentar:
Tatsächlich hat man es mit zwei Problemen zu tun: a) Was genau bedeutet die Aufgabe? b) Wie sieht die Lösung aus?