4. Übung
Äquivalenzrelation, Kongruenzrechnung

Präsenzübungen (20./21./22. Nov)

1.
   a. Stellen Sie die Multiplikationstafel auf für die Restklassen von R_5 und R_6.
   b. In welchen Zeilen der Multiplikationstafel von R_5 tauchen als Ergebnis alle Restklassen von R_5 auf?
      Wie ist das in der Tafel von R_6?
   c. Schreiben Sie alle Lösungen auf für $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$
      i. In R_5.
      ii. In R_6.
   d. Eine Restklasse $\overline{a} \in R_m, \overline{a} \neq \overline{0}$ heißt Nullteiler von R_m, wenn es eine Restklasse $\overline{b} \in R_m, \overline{b} \neq \overline{0}$ gibt mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Was sind nach Aufgabe c. die Nullteiler von R_5 und R_6?
   e. In der Vorlesung haben wir die Multiplikationstabelle für R_7 durchgerechnet. Suchen Sie in dieser nach Nullteilern.
   f. Stellen Sie Vermutungen an, wann Nullteiler auftauchen. Überprüfen Sie die Vermutungen .

Hausübungen (Abgabe: Do, 23.11.06)

2. Untersuchen Sie, ob die Relation eine Äquivalenzrelation ist. Untersuchen Sie dazu <u>alle drei</u> Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:
   a. „sind Aufgabengruppenpartner“
      Erläuterung: Zwei Menschen a,b sind Aufgabengruppenpartner, in Zeichen a AGP b, wenn sie in der Vorlesung „Arithmetik als Prozess“ in diesem Semester ihre Aufgaben in einer Gruppe abgeben.
   b. „sind Gruppenpartner“
      Erläuterung: Zwei Menschen a,b sind Gruppenpartner, in Zeichen a GP b, wenn es (irgend) eine Arbeitsgruppe gibt, in der a und b zusammen arbeiten.
   c. Was ist in a. die Grundmenge und was sind die Äquivalenzklassen, in die die Grundmenge zerfällt?

3. Beweisen Sie:
   Für alle natürlichen Zahlen a, b, c, d und m gilt:
   $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$.

4. Berechnen Sie jeweils x_i mit $0 \le x_i \le 6,\ i \in \mathbb{N}$
   $3^1 \equiv x_1 \bmod 7 \quad 3^2 \equiv x_2 \bmod 7 \quad 3^3 \equiv x_3 \bmod 7$ u.s.w bis Sie eine Regelmäßigkeit entdecken.
   a. Beschreiben Sie die Regelmäßigkeit in Worten.
   b. Beschreiben Sie die Regelmäßigkeit algebraisch.
   c. Bestimmen Sie so möglichst geschickt x in $3^{253} \equiv x_{253} \bmod 7$
   d. Erläutern Sie allgemein: in der Folge $k^1 = x_1 \bmod m, 0 \le x_1 < m$,
      $k^2 = x_2 \bmod m, 0 \le x_2 < m$, $k^3 = x_3 \bmod m, 0 \le x_3 < m$, u.s.w. muss es immer zwei Zahlen x_i geben, die gleich sind. Wann müssen diese gleichen Zahlen spätestens auftauchen?

5. (Eine Übungsaufgabe entsteht)
   Albers: „... und unten rechts steht in der Multiplikationstabelle immer $\bar{1}$.“
   Studentin: „Immer?“ Albers: „Ja, immer!“
   „Immer“ bedeutet natürlich „für jede Modulzahl $m \in \mathbb{N}$ “
   a. Überlegen Sie, welche Restklassenrechnung im konkreten Fall „unten rechts“ berechnet werden muss. Nehmen Sie als Beispiel m = 11, 18 und 74.
   b. Beschreiben Sie die Rechnung für den allgemeinen Fall $m \in \mathbb{N}$ in sprachlicher Form. Was ist zu tun, wenn m gegeben ist?
   c. Formulieren Sie die Aussage „... und unten rechts steht in der Multiplikationstabelle immer $\bar{1}$.“ formaler und genauer (für allgemeines m).
   d. Beweisen Sie die Aussage aus c.

Extraaufgabe
Begründen Sie, dass es nicht zwei natürliche Zahlen x und y geben kann, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 9999999999999999999$ erfüllen.