Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

13. Übung, Lösungsskizzen

---

1. Beispiel: $18 = 2 \cdot 3^2$

Jeder Teiler von 18 lässt sich als 2-Tupel darstellen. $(\ldots, \ldots)$

Anzahl des Faktors 2
Anz. " " 3

Auf dem 1. Platz hat man 2 Möglichkeiten, nämlich 0 oder 1
auf dem 2. Platz 3 Möglichk., nämlich 0, 1 oder 2

$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ Tupel $= 6$ Teiler $T_{18} = \{1, 18, 2, 9, 3, 6\}$

allgemein: Die PFZ zu a sei $a = \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}_0$

Dann ist jeder Teiler von a durch ein m-Tupel darstellbar. Platz i gibt an, wie oft der Primfaktor $p_i$ gewählt wird. Dafür gibt es $n_i + 1$ Möglichkeit. Also hat a $\prod_{i=1}^{m} (n_i + 1)$ Teiler.

2. a) a ist teilerfremd zu b $(a, b \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow_{Df} \quad ggT(a,b) = 1$

b) transitiv bedeutet:

$ggT(a,b) = 1$ und $ggT(b,c) = 1 \Rightarrow ggT(a,c) = 1$

Das gilt nicht allgemein für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Gegenbeispiel: $ggT(12, 13) = 1$ und $ggT(13, 15) = 1$

aber $ggT(12, 15) = 3 \neq 1$

3a. In dem Schema kommen alle Linearkombinationen von 6 und 9 vor. Da ggT(6, 9) = 3, sind alle Linearkomb. durch 3 teilbar.
1234, QS 10, ist nicht durch 3 teilbar

b. Geht man 3 Positionen nach rechts und 2 Positionen nach oben, kommt man auf die gleiche Zahl. $3 \cdot \underline{6} - 2 \cdot \underline{9} = 0$
Folglich: 3 nach rechts, 2 nach oben
und alle ganzzalligen Vielfache davon
6 nach r. 4 nach ob., 9 nach r. 6 nach ob, ....
und auch 3 nach <u>links</u>, 2 nach <u>unten</u> u.s.w.

c. $4 \cdot \underline{6} + 3 \cdot \underline{9} = 24 + 27 = 51$

---

4. $g_3 = 14 \Rightarrow 10^3 \equiv 14 \mod m \Rightarrow 1000 - 14 = 986 = k_1 \cdot m$
$g_4 = 4 \Rightarrow 10^4 \equiv 4 \mod m \Rightarrow 10000 - 4 = 9996 = k_2 \cdot m$
Das gesuchte m ist also Teiler von 986 und 9996
$986 = 2 \cdot 17 \cdot 29 \qquad 9996 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17$
Man sieht, dass $m = 17$ eine und $m = 34$ eine weitere Lösung ist.
$m = 2$ könnte theoretisch auch eine Lösung sein, die man wegen der Gewichte aber realistisch ausschließen kann.