Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

12. Übung, Lösungsskizzen

In allen Lösungsskizzen beschränke ich mich auf die Darstellung des Schrittes von n auf $n+1$.

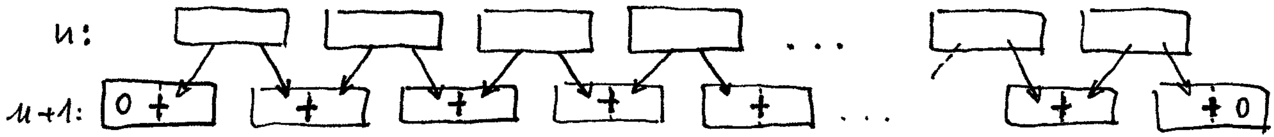
---

1. Es sei B eine Menge mit $n+1$ Elementen und m ein beliebiges Element von B. Dann hat $A = B \setminus \{m\}$ nur n Elemente. Sei $P(A)$ die Menge aller Teilmengen von A. $|P(A)| = 2^n$. Jede Teilmenge von A ist auch Teilmenge von B und $P(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von B, die m <u>nicht</u> enthalten. Fügt man zu jeder Menge von $P(A)$ m hinzu, erhält man die Menge aller Teilmengen von B, die m <u>enthalten</u>. Das sind ebenfalls 2^n Mengen. Also hat B $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen q.e.d.

2. Von den $n+1$ Dingen sei a eins. Dann sind die $n+1$ Dinge ohne a n Dinge, von denen es (Ind.Vor.) $n!$ Permutationen gibt. Zu jeder Permutation kann man a davor setzen $\rightarrow$ $n!$ Permutat. von $n+1$ Dingen mit a auf dem 1. Platz. Ebenso kann man a auf dem 2. Platz einfügen $\rightarrow$ $n!$ Permutationen von $n+1$ Dingen mit a auf dem 2. Platz. u.s.w. Zuletzt kann man a hinter die Permutationen von n Dingen schreiben $\rightarrow$ $n!$ Permut. von $n+1$ Dingen mit a auf dem $n+1$. Platz. Sind insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Permutationen von $n+1$ Dingen q.e.d.

3. Voraus. Die Zahlen in der Zeile n ergeben in der Summe eine Zweierpotenz.

Für das Bilden der Zeile n+1 werden alle Zahlen der Zeile n zwei Mal verwendet



Daher ist die Summe aller Zahlen in Zeile n+1 das Doppelte der Summe aller Zahlen in Zeile n. Da das eine Zweierpotenz ist, ist das Doppelte wieder eine Zweierpotenz.

HAUSÜBUNGEN

4

a) $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

Ind. Vor.

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \quad \frac{1}{6}(n+1)$ auskl.

$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$

$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]$ ausmultiplizieren

$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ q.e.d.

b) $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$

Ind. Vor.

$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$ q.e.d.

5

a. $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1 = 9\underbrace{(3^{2n} - 1)}_{\text{Ind.Vor.}} + 9 - 1$

$= 9 \cdot 8k_1 + 8 = 8(9k_1 + 1)$

5b. $2^{3(n+1)} - 5^{n+1} = 2^{3n+3} - 5^{n+1} = 8 \cdot 2^{3n} - 5 \cdot 5^{n}$

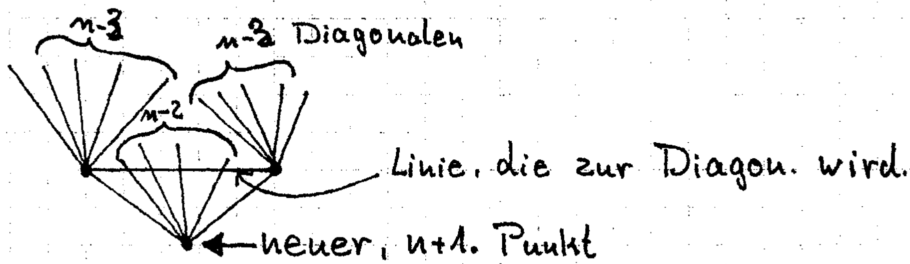
$= 8 \cdot (2^{3n} - 5^{n}) + 8 \cdot 5^{n} - 5 \cdot 5^{n}$

$= 8 \cdot \underset{\text{Ind. Vor.}}{3k_1} + 3 \cdot 5^{n}$

$= 3(8k_1 + 5^{n})$

6. $A(n):\ V(n) = D(n) + n$

$A(n+1):\ V(n+1) = D(n+1) + (n+1)$



Man fügt zu einem n-Eck einen n+1. Punkt hinzu und zieht alle Verbindungslinien zu den anderen n Punkten

$V(n+1) = V(n) + n$

Von dem neuen Punkt gehen n-2 Diagonalen aus. Eine bisher außen liegende Verbindungslinie wird zur Diagonalen. Also $D(n+1) = D(n) + n - 2 + 1 = D(n) + n - 1$

$\Rightarrow D(n) = D(n+1) - n + 1 \quad (*)$

Also: $V(n+1) = V(n) + n$

$\overset{\text{Ind. Vor.}}{=} D(n) + n + n$

$= D(n+1) - n + 1 + n + n$ wegen $(*)$

$= D(n+1) + n + 1$ q.e.d.