Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07
11. Übung, Lösungsskizzen

Präsenzübungen

1 a i) Formel: n^k $\quad n = 2$ Farben
$k = 4$ Ziehungen

$\Rightarrow$ Es gibt $2^4 = 16$ versch. Möglichkeiten für das Ziehen

ii) Formel $\binom{n-1+k}{k}$ $\quad n=2$ Farben
$k=4$ Ziehungen

$$\binom{2-1+4}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5 \quad \text{Möglichkeiten}$$

nämlich (wwww) (wwws) (wwss) (wsss) (ssss)

b) Unterscheidet man nur die Farben, so kommt es doch zu Wiederholungen, da die Farben wiederholt vorkommen. $\Rightarrow$ Nicht stur die Formeln anwenden, sondern (erneut) denken

i) Da die Farben mehrfach vorkommen, kann man die Ziehung zunächst wie a i) behandeln.
$\Rightarrow$ 16 Möglichkeiten. Der Fall (ssss) ist nicht möglich $\Rightarrow$ Es gibt 15 Möglichkeiten

ii) Wie oben a ii). Auch hier ist (ssss) nicht möglich $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

2. Stoßen n Personen miteinander an, jeder mit jedem, so entspricht das allen Möglichkeiten, 2 aus n zu ziehen, ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge. Also $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ „kling"

a) 25 ist nicht als $\frac{n(n-1)}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellbar

b) $n = 5 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$n = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

$n = 8 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Es nehmen 8 Gäste (oder mehr) teil.

HAUSÜBUNGEN

3a) $\binom{49}{6} = 13.983.816$

b) Alle Tipps kosten $13.983.816 \cdot 0{,}75$ € $= 10.487.862$ €
also gut 10 Millionen €

c)

Gewinne	Anzahl		
6 Richtige	$\binom{6}{6}\binom{1}{0}\binom{42}{0}$	=	1
5 R. mit Zuszahl	$\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0}$	=	6
5 Richtige	$\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{42}{1}$	=	252
4 R. mit Zuszahl	$\binom{6}{4}\binom{1}{1}\binom{42}{1}$	=	630
4 Richtige	$\binom{6}{4}\binom{1}{0}\binom{42}{2}$	=	12 915
3 R. mit Zusz.	$\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2}$	=	17 220
3 Richtige	$\binom{6}{3}\binom{1}{0}\binom{42}{3}$	=	229 600

d)

2 Richtige	$\binom{6}{2}\binom{43}{4}$	=	1.851.150
1 Richtig	$\binom{6}{1}\binom{43}{5}$	=	5.775.588
0 Richtige	$\binom{6}{0}\binom{43}{6}$	=	6.096.454
			$13.983.816 = \binom{49}{6}$

13.723.192 Tipps ohne Gewinn

Fortsetzung 2c)

	Anz. der Tipps	·	Gewinn pro Tipp	=	Gewinn pro Klasse
6R	1	·	247.470,70 €	=	247.470,70 €
5RZ	6	·	37.724,10 €	=	226.344,60 €
5R	252	·	2.784,90 €	=	701.794,80 €
4RZ	630	·	147,30 €	=	92.799,00 €
4R	12915	·	43,40 €	=	560.511,00 €
3RZ	17220	·	22,50 €	=	387.450,00 €
3R	229600	·	10,60 €	=	2433.760,00 €
			Summe		4.650.130,10 €

Fazit: Unser „Monstertipp" hätte insgesamt 4,6 Millionen € gebracht. Das mit Sicherheit, also ohne jedes Glück! Egal, welche 6 Zahlen gezogen worden wären.

Wegen der investierten 10,5 Millionen € hätten wir also - mit totaler Sicherheit - etwa 6 Millionen € Verlust gemacht.

Einzige Chance: Wir hatten Glück und der eine Schein, auf dem der Sechser stand, hatte zufällig die Superzahl. Dann hätte sich unser Verlust von ca. 6 Millionen auf 1,6 Millionen Verlust (!) verringert.

4. a) Auf diese Art werden zu viele Möglichkeiten gezählt.

Beispiel: Drei solche 3-er-Mengen könnten

$\{1,2,3\}$ $\{2,3,5\}$ und $\{3,7,8\}$ sein.

Das würde bedeuten, dass A die Teile 1, 2, 3 kontrolliert, B die Teile 2, 3 und 5. Also kommen 2 und 3 doppelt vor, was der Aufgabe widerspricht.

b) Man muss die Teile, die an A gegeben wurden, herauslassen. B bekommt dann nur 3 Teile von 6 und C die restlichen. Das führt auf

$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{für A}} \cdot \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{für B}} \cdot \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{für C}} = \frac{9!}{\cancel{6!}\,3!} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\,3!} \cdot \cancel{\frac{3!}{0!\,3!}}\ 1 = \frac{9!}{3!\,3!\,3!}$$

Das ist gleich dem Permutationsansatz vom letzten Lösungsblatt.

5 a) 1 1 4 4 5 6 7 7 1 1 1 5 5 5 5

••|||••|•|•|•• •••||||••••|

b) |•••||•|| |||••••||••|

2224 $n=6$ 444466 $n=7$

6. a) 2 Löcher $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

3 Löcher $\binom{9}{3} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 84$

4 Löcher $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 126$

Also gibt es insgesamt 246 Stanzmuster

b) Wenn die Kärtchen ungefähr so groß wie die Bremer Kärtchen sind, ist das kein Transportproblem.

c) Macht insgesamt 492 s = 8 min 12 s
Das ist in der Praxis leistbar

Die Warnung des Mathematikers ist also sehr realitätsnah.