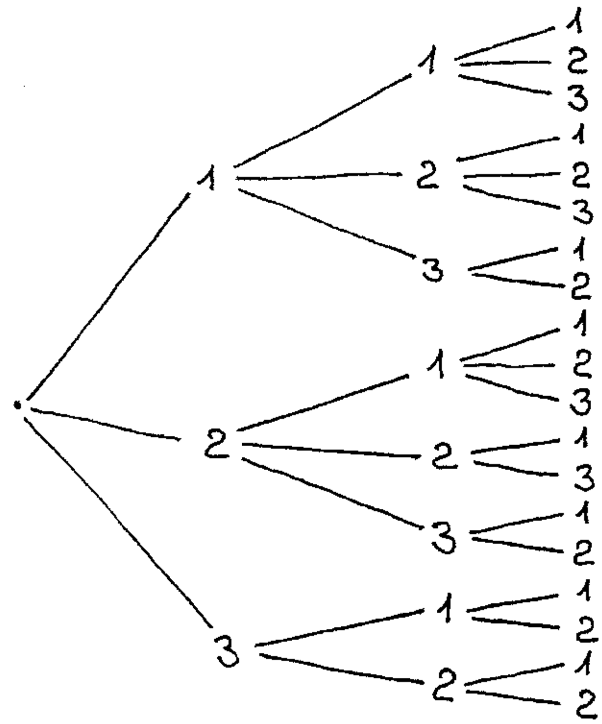
Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07
10. Übung, Lösungsskizzen

1. Da das Baumdiagramm die Systematik beinhaltet, beginnen wir mit dem Baumdiagramm

b)



a)

1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	1
1	2	2
1	2	3
1	3	1
1	3	2
2	1	1
2	1	2
2	1	3
2	2	1
2	2	3
2	3	1
2	3	2
3	1	1
3	1	2
3	2	1
3	2	2

19 Möglichkeiten

c) - neues Baumdiagramm, - Liste
- Ergänzen (in Gedanken) des Baumes aus b). Alle Zweierverzweigungen werden nun zu einer Dreierverzw. Dadurch kommen 8 Verzw. hinzu.
- 3-Tupel, auf jedem Platz 3 Möglichkeiten $\Rightarrow 3^3 = 27$

2.

A	B	B	C	C
1	2	3	4	5
1	2	4	3	5
1	2	5	3	4
1	3	4	2	5
1	3	5	2	4
1	4	5	2	3
2	3	4	1	5
2	3	5	1	4
2	4	5	1	3
3	1	2	4	5
3	1	4	2	5
3	1	5	2	4
3	2	4	1	5
3	2	5	1	4
3	4	5	1	2

2	1	3	4	5
2	1	4	3	5
2	1	5	3	4

Systematik:

A durchläuft 1, 2, ..., 5

B bekommt die niedrigsten beiden verbleibenden Zahlen. Bedingung: linke Zahl immer kleiner als rechte Zahl.

Denn das Vertauschen der beiden B-Zahlen bringt nichts Neues →

2 (Fortsetzung)

C bekommt die verbleibenden 2 Zahlen

<u>oder</u> (2. Lösungsweg)

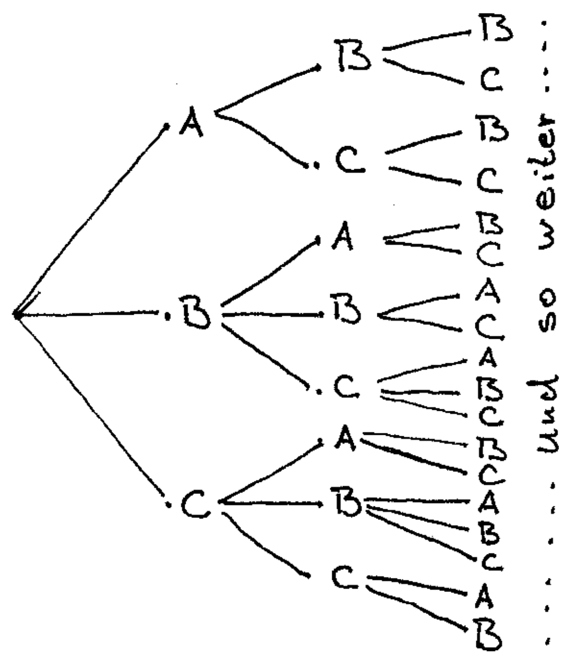
1	2	3	4	5	
A	B	B	C	C	
A	B	C	B	C	
A	B	C	C	B	
A	C	B	B	C	
A	C	B	C	B	
A	C	C	B	B	
B	A	B	C	C	
B	A	C	B	C	
B	A	C	C	B	
B	B	A	C	C	
B	B	C	A	C	
B	B	C	C	A	
B	C	A	B	C	← B C A C B
B	C	B	A	C	
B	C	B	C	A	
B	C	C	A	B	
B	C	C	B	A	
C	A	B	B	C	
C	A	B	C	B	← C A B B B
C	B	A	B	C	← C B A C B
C	B	B	A	C	
C	B	B	C	A	
C	B	C	A	B	
C	B	C	B	A	
C	C	A	B	B	
C	C	B	A	B	
C	C	B	B	A	

System:

Man schreibt die 5 Buchstaben (ohne Wiederholung) als 5er-Wörter nach dem Lexikonprinzip auf

Insgesamt 30 Wörter

3. Lösungsmöglichkeit: Baumdiagramm



Man muss auf jeder Stufe beachten, welche Buchstaben noch wenigstens einmal vorhanden sind.

HAUSÜBUNGEN

3. <u>1. Lösungsweg</u> (vorsichtiges Zerlegen in übersichtliche Teilmengen)

- H und Z gleich, E verschieden $\quad 9\cdot 1\cdot 9 = 81$
- H und E gleich, Z verschieden $\quad 9\cdot 9\cdot 1 = 81$
- Z und E gleich, H verschieden $\quad 9\cdot 9\cdot 1 = 81$

Addition, da Zerlegung in disj. Teilmengen $\quad 243$

Für die Hunderterziffer H gibt es 9 Möglichk. 1..9
" " Zehner- und Einerziffer Z und E 10 Möglichk 0..9

<u>2. Lösungsweg</u>

H frei wählbar → 9 Mögl.

Z ↗ gleich H → 1 Mögl → E verschied. von H=Z $\quad$ 9 Mögl.

Z ↘ versch. von H → 9 Mögl. → E gleich H <u>oder</u> Z $\quad$ 2 Mögl.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oberer Zweig:} & 9\cdot 1\cdot 9 = 81\\ \text{unterer Zweig:} & 9\cdot 9\cdot 2 = 162\end{array}\right\}\ \text{Summe}\ \underline{\underline{243}}$$

<u>3. Lösungsweg</u> (Subtraktionsprinzip)

Alle echt dreistelligen Zahlen:	$9\cdot 10\cdot 10$	=	900
alle Ziffern verschieden	$9\cdot 9\cdot 8$	=	648 −
alle Ziffern gleich	$9\cdot 1\cdot 1$	=	9 −
	übrige Zahlen:		243

4. Das Zuordnen der Teile auf die Kontrolleure kann man schreiben als

$$\begin{array}{ccccccccc l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \leftarrow \text{Teile}\\ A & A & A & B & B & B & C & C & C & \leftarrow \text{Kontrolleure}\end{array}$$

Jede Zuordnung ist eine Permutation der 3x3 Buchstaben. Nach der allgemeinen Permutationsformel gilt

$$\frac{9!}{3!\,3!\,3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8\cdot \cancel{9}}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8$$

$$= 30\cdot 56 = \underline{\underline{1680}}$$

5. Nur indirekt geht aus der Aufgabe hervor, dass die vier Personen nicht unterschieden werden sollen. Es sollen also nur 4 Plätze herausgegriffen werden ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

ABCD
ABCE
ABCF
ACDE
ACDF
ADEF

BCDE
BCDF
BDEF

CDEF

Es gibt also $6+3+1=10$ Möglichkeiten

6. a) 12 Fünfecke haben $12 \times 5 = 60$ Ecken
Zu jeder (Raum-) Ecke kommen noch 2 Sechsecke. Folglich müssen die Sechsecke $60 \cdot 2 = 120$ Ecken bilden. Dazu braucht man $\boxed{20 \text{ Sechsecke}}$

b) In jeder (Raum-) Ecke liegt auch eine Fünfeck-Ecke. Also gibt es so viele (Raum-) Ecken, wie es Fünfeck-Ecken gibt: $\boxed{60}$

c) 1. Weg
Von jeder ~~Kante~~ Ecke gehen 3 Kanten aus
$\rightarrow 60 \cdot 3 = 180$ So zählt man jede Kante allerdings zwei Mal $\rightarrow 180 : 2 = \boxed{90}$

2. Weg
Ein Teil der Kanten wird durch die Fünfeck-Kanten gebildet $\rightarrow 12 \cdot 5 = 60$
Die übrigen Kanten werden von Sechsecken gebildet, jeweils 3 pro Sechseck $\rightarrow 20 \cdot 3 = 60$. Dann wird aber jede Kante doppelt gezählt $\rightarrow 60 : 2 = 30$

Macht zusammen $60+30=\boxed{90}$

3. Weg

Alle Flächen haben $12\cdot 5+20\cdot 6=180$ Flächenkanten

Je zwei Flächenkanten bilden eine Raumkante

$180:2=\boxed{90}$

7. Zur Gleichung $27x+35y=1127$ werden alle natürlichen Lösungen gesucht $(x,y\in\mathbb{N}_0)$

a) Euklidischer Alg.

$$35=1\cdot 27+8$$
$$27=3\cdot 8+3$$
$$8=2\cdot 3+2$$
$$3=1\cdot 2+1$$

b) Rückwärts auflösen, um 1 als Linearkombination von 35 und 27 darzustellen

$1=1\cdot\underline{3}-1\cdot\underline{2}$

$\underline{2}=1\cdot\underline{8}-2\cdot\underline{3}$

$\underline{3}=1\cdot\underline{27}-3\cdot\underline{8}$

$\underline{8}=1\cdot\underline{35}-1\cdot\underline{27}$

$$\begin{aligned}
&=1\cdot\underline{3}-1\cdot(1\cdot\underline{8}-2\cdot\underline{3})\\
&=3\cdot\underline{3}-1\cdot\underline{8}\\
&=3\cdot(1\cdot\underline{27}-3\cdot\underline{8})-1\cdot\underline{8}\\
&=3\cdot\underline{27}-10\cdot\underline{8}\\
&=3\cdot\underline{27}-10\cdot(\underline{35}-\underline{27})\\
&=13\cdot\underline{27}-10\cdot\underline{35}
\end{aligned}$$

Also gilt $\underline{27}\cdot 13+\underline{35}\cdot(-10)=1$

c) Erweitern auf geforderte Zielzahl

$$27 \cdot (13 \cdot 1127) + 35 \cdot (-10 \cdot 1127) = 1127$$

$$\underline{27} \cdot 14651 + \underline{35} \cdot (-11270) = 1127$$

d) über die Gleichung

$$27 \cdot (-35) + 35 \cdot 27 = 0 \quad (1)$$

die Koeffizienten so verändern, dass sie im geforderten Bereich liegen, hier in $\mathbb{N}_0$.

Wegen $11270 : 27 = 417{,}407\ldots$

wird (1) 418 Mal addiert

$$\underline{27} \cdot 14651 + 35 \cdot (-11270) = 1127$$

$$\underline{27 \cdot (-35 \cdot 418) + 35 \cdot (27 \cdot 418) = 0} \quad +$$

$$27 \cdot 21 + 35 \cdot 16 = 1127 \quad (2)$$

Folglich ist $\boxed{\text{21 Hühner und 16 Gänse}}$ eine mögliche Lösung

e) Suche nach weiteren Lösungen.

Sowohl die einmalige Addition von (1) zu (2)

als auch " " Subtraktion von (1) von (2)

führt bereits zu negativen Koeffizienten.

Also ist die Lösung aus d) die einzige Lösung.