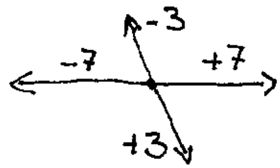
Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

Übung 9, Lösungsskizzen

1a) Bewegt man sich in einer Zeile nach rechts, so werden Schritt für Schritt 7 addiert. kurz $\xrightarrow{+7}$

Ebenso:



b) Alle Zahlen haben die Form $\overbrace{7i}^{+3\cdot 0}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Daher die 0. Zeile

c) Ebenso: $7\cdot 0 + 3\cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$ 0. Spalte

d) Entsprechend heißt das $7\cdot 8 + 3\cdot 6 = 74$

e) Drei Mal $\xrightarrow{+7}$ und dann sieben Mal $\nwarrow -3$

Da $3\cdot 7 - 7\cdot 3 = 0$

f) Wegen $5\cdot 3 - 2\cdot 7 = 1$ kommt man mit $5\times \searrow +3$ und $2\times \xleftarrow{-7}$ auf die nächst größere Zahl. So kann man von einer Zahl, z.B. 0, zu jeder anderen, größeren gelangen. Ebenso umgekehrt: $2\cdot 7 - 5\cdot 3 = -1$

oder:

In Spalte 0 stehen alle Zahlen $\equiv 0 \mod 3$

In Spalte 1 " " " $\equiv 1 \mod 3$

" " 2 " " " $\equiv 2 \mod 3$

Ab Spalte 3 wiederholt sich das zyklisch.

f) Dazu muss man mit „Siebenerschritten" möglichst dicht an 100 gelangen und dann probieren, ob die Differnz zu 100 durch 3 teilbar ist

$$100 = 14 \cdot 7 + 2 = 13 \cdot 7 + 9 = 16 \cdot 7 - 4 \cdot 3$$

$$= 13 \cdot 7 + 3 \cdot 3 \qquad \text{20 Schritte}$$

16 Schritte

Forschung Trapezzahlen

a) 1 ✗ 2 ✗ $3 = 1+2$ 4 ✗ 5 ✗

$6 = 1+2+3$ $7 = 3+4$ 8 ✗ $9 = 4+5 = 2+3+4$

$10 = 1+2+3+4$ $11 = 5+6$ $12 = 3+4+5$ $13 = 6+7$

$14 = 2+3+4+5$ $15 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5 = 7+8$ 16 ✗

$17 = 8+9$ $18 = 5+6+7 = 3+4+5+6$ $19 = 9+10$

$20 = 2+3+4+5+6$

b) Alle ungeraden Zahlen

x x o o
x x o o o

gerade + ungerade = ungerade

$4 + 5 = 9$
↓ ↓
$5 + 6 = 11$

Erhöht man beide um 1, kommen insgesamt 2 dazu → nächste ungerade Zahl

x x ◇ o o
x x ◇ o o o

$$n + (n+1) = 2n+1 = m$$

$$\Rightarrow n = \frac{m-1}{2}$$

Ist die ungerade Zahl m gegeben, so ist $n = \frac{m-1}{2}$ und $n+1 = \frac{m+1}{2}$ $\Rightarrow n + (n+1) = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} = \frac{2m}{2} = m$

zu d) Wir gehen systematisch die Zahl der Summanden durch

2 Zahlen	$n+(n+1) = 2n+1$	alle ungeraden Zahlen
3 Zahlen	$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also alle durch 3 teilbaren Zahlen ab 6	
4 Zahlen	$n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6 = 4(n+1)+2$, das sind alle Zahlen $\equiv 2 \mod 4$ ab 10	
5 Zahlen	$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$, das sind alle durch 5 teilbaren Zahlen ab 15	

k Zahlen: $n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+k-1)$

$$= k\cdot n + \sum_{i=1}^{k-1} i = k\cdot n + k\cdot(k-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= k\cdot\left(n + \frac{k-1}{2}\right)$$

1. Fall
Ist k ungerade, so ist $\frac{k-1}{2} \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

> Ist eine Zahl **m** durch eine <u>ungerade</u> Zahl **k** teilbar und ist $m \geq k\cdot\frac{k+1}{2}$, so ist m ~~in~~ als Summe von k aufeinander folgenden Zahlen darstellbar.

2. Fall: k gerade, also ~~[illegible]~~ $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow k\cdot\left(n+\frac{k-1}{2}\right) = k\cdot\left(n+\frac{k}{2}\right) - \frac{k}{2}$$

$$= k\left(n+\frac{k}{2}-1\right) + \frac{k}{2} \equiv \frac{k}{2} \mod k$$

> Läßt eine Zahl m beim Teilen durch eine <u>gerade</u> Zahl k den Rest $\frac{k}{2}$, ~~so ist~~ und ist $m \geq k\cdot\frac{k+1}{2}$, so ist m als Summe von k aufeinander folgenden Zahlen darstellbar.