Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

8. Übung, Lösungsskizzen

1. a. In $\mathbb{N}$ kann man 6 zerlegen in $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$
Da $2 \notin D$, bleibt in D nur $6 = 1 \cdot 6$. Also ist 6 in D Primzahl.

b. prim in D sind 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48,

c. „$\Rightarrow$" $9 | d \Rightarrow d = 9 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow d = 3 \cdot (3k)$ Sowohl 3 als auch $3 \cdot k$ sind Elemente von D.
$\Rightarrow$ d hat in D mehr als 2 Teiler
$\Rightarrow$ d ist in D keine Primzahl

„$\Leftarrow$" d ist in D keine Primzahl
$\Rightarrow$ Es gibt zwei Zahlen $d_1, d_2 \neq 1$ und $\neq d$ mit $d_1 \cdot d_2 = d$, $d_1, d_2 \in D$
$\Rightarrow d_1 = 3 \cdot q_1$ und $d_2 = 3 \cdot q_2$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow d = d_1 \cdot d_2 = 3 \cdot q_1 \cdot 3 \cdot q_2 = 9 q_1 q_2$
$\Rightarrow 9 | d$

d. $108 = 9 \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \cancel{18 \cdot 6}\ 3 \cdot 6 \cdot 6$
$= 3 \cdot 3 \cdot 12$

Beides sind PFZ (siehe b.)

Hausübungen

2. $t = 4$

Basis b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Teilbk. Regel	zwei EZ	aQS	eine EZ	QS	zwei EZ	aQS	eine EZ	QS	zwei EZ	aQS

a) Die Einträge setzen sich periodisch fort mit der Periode 4

→

Wir gehen die Basen b systematisch mod 4 durch

$b \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow 4 | b$ Also „eine Endziffer - Regel"

$b \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow 4 | b-1$ Also Quersummen - Regel

$b \equiv 2 \mod 4 \Rightarrow b-2 = 4k, \; k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow b = 4k+2 = 2(2k+1)$

D.h. b ist ungeradzahliges Vielfaches von 2 oder **2** ist genau einmal Teiler von b

Damit ist $4 \nmid b$, aber $4 | b^2$

Folglich gilt die „zwei Endziffern - Regel"

$b \equiv 3 \mod 4 \Leftrightarrow b \equiv -1 \mod 4 \Rightarrow 4 | b+1$

Also alternierende QS - Regel

b) $t = 5$

Basis b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Teilbk. Regel	–	–	aQS	eine EZ	QS	–	–	aQS	eine EZ	QS

Begründung

$b \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow 5 | b$ Also „eine Endziffer - Regel"

$b \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow 5 | b-1$ Also Quersummen - Regel

$\left.\begin{array}{l} b \equiv 2 \mod 5 \\ b \equiv 3 \mod 5 \end{array}\right\}$ keine besondere Regel $\rightarrow$ gewichtete QS

$b \equiv 4 \mod 5 \Leftrightarrow b \equiv -1 \mod 5 \Rightarrow 5 | b+1$

Also alternierende QS-Regel

Anmerkung und Vergleich $t = 4$ und $t = 5$
Da $t = 5$ Primzahl ist, kann es keine „zwei Endziffer-Regel" geben. Denn wenn $5 \nmid b$ ist ist auch $5 \nmid b^2$.
Das ist für $t = 4$ anders, da $4 = 2^2$ Hier kann die „zwei Endziffer - Regel" greifen, denn $2 | b \Rightarrow 4 | b^2$

3 a) $20!$ ist durch $2,3,4,\dots,20$ teilbar
Also ist $20!+2$ durch 2 teilbar, allgemein
$20!+k$ ist durch k teilbar, $k=2,3,4,\dots,20$
nach der Teilbarkeitsregel: $a|b$ und $a|c \Rightarrow a|b+c$

b) d wird so konstruiert, dass von den Zahlen 2,3,4… …20 nacheinander immer nur die Primfaktoren aufgenommen werden, die noch fehlen.

$$d = 2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot7\cdot2\cdot3\cdot11\cdot13\cdot2\cdot17\cdot19 = 232.792.560$$

2, 3, 4, 5, 6, 7 u.s.w

z.B. Wird für die Teilbarkeit durch 8 nur <u>eine</u> 2 als Faktor aufgenommen, da das anfängliche Teilprodukt $2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot7$ bereits durch 4 teilbar ist.

c) Die Primzahlen von 2 bis 23 müssen nicht geprüft werden wegen $a|b$ und $a\nmid c \Rightarrow a\nmid b+c$
Die Primzahlen von 29 bis $\sqrt{232.792.583} \approx 15258$ müssen getestet werden, denn die Primteilersuche muss bis zur Wurzel aus der zu untersuchenden Zahl fortgeführt werden.

---

4. Da eine Zahl, die auf 5 endet, keine Primzahl sein kann, gibt es für die drei aufeinander folgenden unger. Zahlen folgende Möglichkeiten „x7", „x9", „(x+1)1" oder „x9", „(x+1)1", „(x+1)3". Beispiele: 37, 39, 41 99, 101, 103
Diese und andere Beispiele legen nahe, dass immer eine der drei Zahlen durch 3 teilbar ist. →

4 Forts.

Beweis: Seien n, $n+2$, $n+4$ drei aufeinander folgende ungerade Zahlen. Wir betrachten diese drei Zahlen modulo 3

Fall 1: $n \equiv 0 \mod 3$. Dann ist n keine Primzahl.

Fall 2: $n \equiv 1 \mod 3$

$\Rightarrow n+2 \equiv 0 \mod 3$ Also ist $n+2$ keine Primzahl

Fall 3: $n \equiv 2 \mod 3$

$\Rightarrow n+4 \equiv 0 \mod 3$ Also ist $n+4$ keine Primzahl

In jedem der drei Fälle ist eine der drei Zahlen durch 3 teilbar, also keine Primzahl.

Also ist 3, 5, 7 der einzige Fall für Primzahldrillinge.

---

5. a) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a=9$ $b=4$

b) Stimmt nicht " "

c) Stimmt, wenn $a \neq b$ a prim $\Rightarrow T(a) = \{1, a\}$

b prim $\Rightarrow T(b) = \{1, b\}$

$T(a) \cap T(b) = \{1\}$ wenn $a \neq b$

d) Stimmt nicht Gegenbeispiel $a=3$ $b=6$

$ggT(3,6) = 3$