Reimund Albers, ~~Einf~~ Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

7. Übung, Lösungsskizzen

1.a) $b = 10$

Gewählt 1, 5, 8

$$\begin{array}{r} 851 \\ -158 \\ \hline 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

Die Ziffern 4, 5, 9 reproduzieren sich selbst

b) $b = 7$

Gewählt 2, 3, 6

$$\begin{array}{r} 632 \\ -236 \\ \hline 363_7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 633 \\ -336 \\ \hline 264_7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 642 \\ -246 \\ \hline 363_7 \end{array}$$

Der Prozess endet in einem Zweierzyklus $2,4,6 \leftrightarrow 3,3,6$

$b = 8$

Gewählt 2, 4, 7

$$\begin{array}{r} 742 \\ -247 \\ \hline 473_8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 743 \\ -347 \\ \hline 374_8 \end{array}$$

3, 4, 7 repoduziert sich selbst

c) Vermutungen

- Ist b gerade, so erhält man 3 Ziffern, die sich selbst reproduzieren. Ist b ungerade, so erhält man 2 Mengen von 3 Ziffern, die sich gegenseitig erzeugen.
- In der Differenz ist die mittlere Ziffer immer $b-1$
- In der Differenz ist die Summe der äußeren beiden Ziffern $b-1$
- Für gerades b sind die drei Ziffern des Endzustandes $\frac{b}{2}-1, \frac{b}{2}, b-1$
- Für ungerades b sind die beiden Ziffernmengen $\left\{\frac{b-1}{2}, \frac{b-1}{2}, b-1\right\}$ und $\left\{\frac{b-3}{2}, \frac{b+1}{2}, b-1\right\}$

d) $b = 9$

Gewählt 2, 7, 8

$$\begin{array}{r} 872 \\ -278 \\ \hline 583_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 853 \\ -358 \\ \hline 484_9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 844 \\ -448 \\ \hline 385_9 \end{array}$$

d Fortsetzung

$b = 11$

Gewählt 3, 5, 9

$$\begin{array}{r} 953 \\ -359 \\ \hline 5A5 \end{array} \quad \begin{array}{r} A55 \\ -55A \\ \hline 4A6 \end{array} \quad \begin{array}{r} A64 \\ -46A \\ \hline 5A5 \end{array}$$

Die Vermutungen werden durch die beiden Beispiele bestätigt.

HAUSÜBUNGEN

2. a) $12345_{16} > DFC9_{16}$

Bei gleicher Basis und verschiedener Anzahl von Ziffern ist die Zahl größer, die mehr Ziffern hat.

b) $121212_7 < 121212_8$

Bei verschiedener Basis und gleichen Ziffern ist die Zahl größer, die ~~zur~~ die größere Basis hat.

c) $\underset{\text{nach b)}}{BA5_{12} < BA5_{16}} \underset{\text{nach a)}}{< AC84_{16}}$

d) (Trick der schnellen Umwandlung von ~~einer~~ einer Basis b_1 in die andere Basis b_2, wenn $b_1^k = b_2$, $k \in \mathbb{N}$. Siehe auch Umwandlung $2 \Leftrightarrow 8$ und $2 \Leftrightarrow 16$)

729	243	81	27	9	3	1
	1	2	2	1	2	2

81	9	1
5	7	8

$\Rightarrow 122122_3 = 578_9 > 122_9$

3. Diese Regeln müssen die Simpsons lernen:

Eine Zahl (im 8er-System) ist durch .... teilbar, wenn

2: die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist

3: die alternierende Quersumme durch 3 teilbar ist

4: die letzte Ziffer durch 4 ...

5: (es gibt keine einfache Regel)

3 (Forts.)

6 : sie durch 2 und 3 teilbar ist.

7 : die Quersumme durch 7 ....

$10_8 = 8$: die letzte Ziffer 0 ist.

11_8 : die alternierende QS durch 11_8 teilbar ist

$14_8 = 12$: sie durch 3 und 4 teilbar ist

14 : sie durch 2 und 7 teilbar ist

$\left.\begin{matrix} 20_8 = 16 \\ 40_8 = 32 \\ 100_8 = 64 \end{matrix}\right\}$ wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch $\left\{\begin{matrix} 16 \\ 32 \\ 64 \end{matrix}\right\}$ teilbar ist.

---

4. $401_c = 2300_b \Rightarrow 4c^2 + 1 = 2b^3 + 3b^2$

$$= (2b+3)b^2$$

$4c^2+1$ hat also eine Quadratzahl als Teiler

Da 4 als Ziffer vorkommt, muss $c \geq 5$ sein

c	5	6	7	8	9
$4c^2+1$	101 prim	145 $= 5 \cdot 29$	197 prim	257 prim	325 $= 5^2 \cdot 13$

Danach kann $c = 9$ und $b = 5$ eine Lösung sein.

Probe: $(2b+3) \cdot b^2 = (2 \cdot 5 + 3) \cdot 5^2 = 13 \cdot 5^2$ ✓

Also ist eine Lösung $c = 9$ $b = 5$

Es ist offen, ob es noch weitere Lösungen gibt.

5.

---

a) Eine Zahl ist durch $b-1$ teilbar, wenn ihre Quersumme durch $b-1$ teilbar ist.

Die Quersumme von 12331_b ist 10. 10 ist durch 1, 2, 5, 10 teilbar. Also kann (zunächst) $b-1$ gleich 1, 2, 5 oder 10 sein.

5 (Forts.) $b-1=1 \Rightarrow b=2$ Die Zahl 12331_2 ist unsinnig, denn die Ziffern 2 und 3 sind im Zweiersystem nicht zugelassen.

$b-1=2 \Rightarrow b=3$ (Dann ist $12331_3 = 172$ Das ist durch 2 teilbar.) Die Ziffer 3 ist aber im 3er-System nicht zugelassen

$b-1=5 \Rightarrow b=6$ $12331_6 = 1855$ also durch 5 teilb.

$b-1=10 \Rightarrow b=11$ $12331_{11} = 17700$ also durch 10 teilb.

b) Die Zahl 12331_b ist für keine Basis b durch b teilbar, denn dazu müsste sie auf 0 enden. (Einerziffer gleich 0)

c) Eine Zahl ist durch b+1 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch b+1 teilbar ist.
12331_b hat die alternierende Quersumme $1-2+3-3+1=0$
0 ist durch jede Zahl b+1 teilbar.
$\Rightarrow$ 12331_b ist für jede Basis durch b+1 teilbar

Beispiele: $b=6$ $12331_6 = 1855_{10} = 7 \cdot 265$
$b=10$ $12331_{10} = 11 \cdot 1121$
$b=9$ $12331_9 = 8290_{10} = 10 \cdot 829$

Allgemeiner Beweis:
$12331_b = b^4 + 2b^3 + 3b^2 + 3b + 1$. Teilt man dieses Polynom durch $b+1$ ergibt sich. (Polynomdivision)
$(b^4+2b^3+3b^2+3b+1) : (b+1) = b^3 + b^2 + 2b + 1$
d.h. die Division geht für alle $b \in \mathbb{N}$ auf.

6. Wegen der Implikation direkt, muss man „A" und „B" umdrehen und nachschauen ob dort eine gerade Zahl steht.
Wegen der Kontraposition (äquivalente Aussage zur Implikation) „Wenn auf der anderen Seite keine gerade (= ungerade) Zahl steht, dann darf auf der Vorderseite nicht „A" und nicht „B" (= weder „A" noch „B") stehen." Muss man auch die „1" umdrehen und nachschauen, dass dort weder „A" noch „B" steht.
Man muss „C" und auch „2" nicht umdrehen, denn für diese Fälle legt weder die Implikation direkt noch die Kontraposition etwas fest. (ex falso quod libet)

Extraaufgabe

Die Zahlen sind nach ihrer Darstellung als Binärzahl geordnet. Auf Karte ① stehen alle Zahlen, die am Ende eine 1 haben, also alle ungeraden Zahlen.
Auf Karte ② alle Zahlen, die an der 2. Stelle von rechts, also die Stelle mit der Wertigkeit 2, eine 1 haben

also $\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}\,1\,\underbrace{\_}$ egal ob 0 oder 1. Ebenso ~~di~~ sind die übrigen Karten gestaltet.

Umgekehrt gilt dann z.B. für $37 = 32 + 4 + 1 = 100101_2$ dass diese Zahl auf den Karten ①, ④ und ㉜ auftaucht.