Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

6. Übung   Lösungsskizzen

1. $10110110_2 = 2 + 4 + 16 + 32 + 128 = 182_{10}$

2er → 8er: man darf 3er-Gruppen von Ziffern zusammenfassen, da $2^3 = 8$

$\underbrace{010}_{2}\underbrace{110}_{6}\underbrace{110}_{6}{}_2 = 266_8$

2er → 16er: man darf 4er-Gruppen von Ziffern zusammenf.

$\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0110}_{6}{}_2 = B6_{16}$

$b = 7$

$$\begin{aligned} 182 &= 26 \cdot 7 + 0 \\ 26 &= 3 \cdot 7 + 5 \\ 3 &= 0 \cdot 7 + 3 \end{aligned} \qquad 182_{10} = 350_7$$

$AC_{16} = 10 \cdot 16 + 12 = 172_{10}$

$b = 2$:

$$\begin{aligned} 172 &= 86 \cdot 2 + 0 \\ 86 &= 43 \cdot 2 + 0 \\ 43 &= 21 \cdot 2 + 1 \\ 21 &= 10 \cdot 2 + 1 \\ 10 &= 5 \cdot 2 + 0 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned} \qquad = 10101100_2$$

In 3er-Gruppen zusammenfassen für 8er-System

$\underbrace{010}_{2}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}{}_2 = 254_8$

$b = 7$

$$\begin{aligned} 172 &= 24 \cdot 7 + 4 \\ 24 &= 3 \cdot 7 + 3 \\ 3 &= 0 \cdot 7 + 3 \end{aligned} \qquad 172_{10} = 334_7$$

2.

a)

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

5er - System

b)
$$
\begin{array}{r}
3212 \cdot 13 \\
\hline
3212 \\
20141 \\
\hline
102311
\end{array}
$$

c) $3212_5 = 432_{10}$

$13_5 = 8_{10}$

$432 \cdot 8 = 3456_{10} = 102311_5$

d) $41311 : 3_5 = 12102_5$

$$
\begin{array}{l}
41311 : 3_5 = 12102_5 \\
\underline{3} \\
11 \\
\underline{11} \\
\;03 \\
\;\;\underline{3} \\
\;\;011
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
20143 : 4 = 2244 \text{ Rest } 2 \\
-\underline{13} \\
\;\;21 \\
\;\;\underline{13} \\
\;\;\;34 \\
\;\;\;\underline{31} \\
\;\;\;\;33 \\
\;\;\;\;\underline{31} \\
\;\;\;\;\;2
\end{array}
$$

e) $41311_5 = 2706_{10}$ $\qquad 2706 : 3_{10} = 902_{10} = 12102_5$

$20143_5 = 1298_{10}$ $\qquad 1298 : 4_{10} = 324$ Rest 2 $\qquad 324_{10} = 2244_5$

HAUSÜBUNGEN

3. a) $53 = b^2 + 2b + 5$

$b^2 + 2b + 1 = 48 + 1$

$(b+1)^2 = 49$

$b + 1 = +7$ oder $b + 1 = -7$

$\underline{\underline{b = 6}}$ oder $b = -8$

keine sinnv. Lösung

Probe

$1 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 5$

$= 36 + 12 + 5 = 53$

b) $177 = b^3 + 2b^2 + 2$

$b^3 + 2b^2 = 175$ $\qquad$ b^3 darf nicht über 175 liegen

$\Rightarrow b \leq 5$

$b^3 \geq 88$, denn sonst passt b^3 2 Mal in 175

$\Rightarrow b \geq 5$ Also $\underline{\underline{b = 5}}$

(Mit Probieren schafft man es auch)

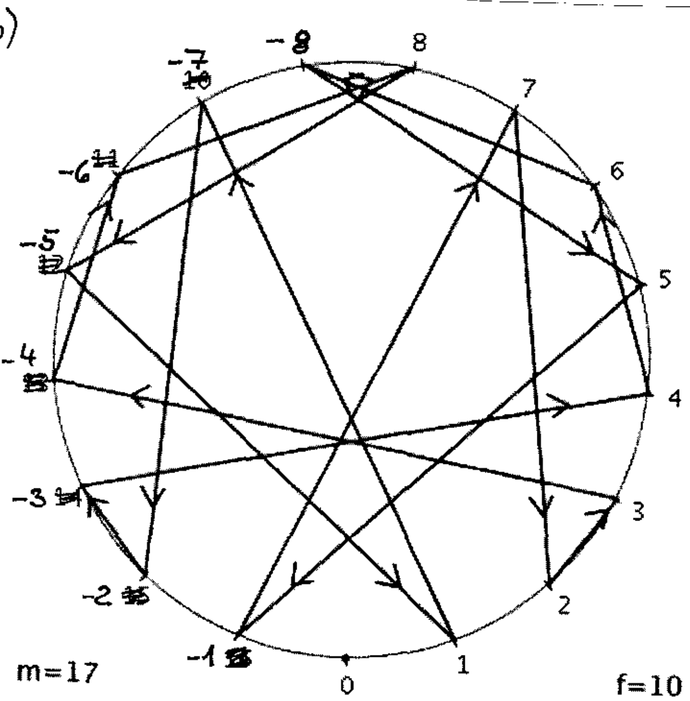
Probe: $1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2$

$= 125 + 50 + 2 = 177$

4. a)

$10 \equiv \overset{-7}{\cancel{10}} \bmod 17$	$10^9 \equiv 7 \bmod 17$	$10^n \equiv 10^{n-16} \bmod 17$
$100 \equiv -2 \bmod 17$	$10^{10} \equiv 2 \bmod 17$	für $n \geq 17$, $n \in \mathbb{N}$
$10^3 \equiv -3 \bmod 17$	$10^{11} \equiv 3 \bmod 17$	
$10^4 \equiv 4 \bmod 17$	$10^{12} \equiv -4 \bmod 17$	
$10^5 \equiv 6 \bmod 17$	$10^{13} \equiv -6 \bmod 17$	
$10^6 \equiv -8 \bmod 17$	$10^{14} \equiv 8 \bmod 17$	
$10^7 \equiv 5 \bmod 17$	$10^{15} \equiv -5 \bmod 17$	
$10^8 \equiv -1 \bmod 17$	$10^{16} \equiv 1 \bmod 17$	

b)



Man zeichnet das Diagramm mit Pfeilen (Bild erzeugt mit Programm von Bjørn Singer). Dann durchläuft man das Diagramm von 1 aus.

c) 7 2 8 6 2

4 -3 -2 -7 1 Gewicht

$28 - 6 - 16 - 42 + 2 = 30 - 64 = -34 = 17 \cdot (-2)$ gewichtete Quersumme

c) 1 8 5 5 5 5

6 4 −3 −2 −7 1 Gewicht

$6+32-15-10-35+5 = 43-60 = -17 = 17\cdot(-1)$ gewichtete QS

16 6 8 1 3 5 2

5 −8 6 4 −3 −2 −7 1 Gewicht

$5-48+36+32-3-6-35+2 = 75-92 = -17 = 17\cdot(-1)$

d) Die gewichtete QS ist:

$2-1-8+4x-2+1 = 4x-8 \qquad 0 \leq x \leq 9$

Diese soll ein Vielfaches von 17 sein

Das kann nur $4x-8=0$ sein $\Rightarrow x=2$

Probe (Rechner) $1010102010 : 17 = 59417765 3$

Da $4x-8 = 4(x-2)$ durch 4 teilbar ist, ist die nächste Möglichkeit für eine Lösung $4x-8 = -4\cdot 17 = -68$

also $4x = -60 \quad x = -15$ keine Ziffer, ebenso $4x-8 = 4\cdot 17$

Also ist $x=2$ die einzige Lösung.

e) Seien a, b die beiden Ziffern

Dann ist $10a+b$ die zweistellige Zahl, Name z_2

Dann ist $1000a + 100b + 10\cdot 2a + 2b$ die vierstellige Zahl z_4

i) $z_4 = 1020a + 102b = 102(10a+b) = 6\cdot 17\cdot(10a+b)$

Also ist z_4 stets durch 17 teilbar

ii) $z_4 : 17 = 6\cdot(10a+b) = 6\cdot z_2$

f)
$$\begin{array}{r} 7286\cancel{2} \\ -\ 10 \\ \hline 727\cancel{6} \\ -\ 30 \\ \hline 69\cancel{7} \\ -35 \\ \hline 34 = 2\cdot 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18555\cancel{5} \\ -\ 25 \\ \hline 185\cancel{3}\cancel{0} \\ -\ 15 \\ \hline 170 = 10\cdot 17 \end{array}$$

Nullen gleich streichen!

$$
\begin{array}{r}
1668135\cancel{2} \\
-\quad 10 \\
\hline
166812\cancel{5} \\
-\quad 25 \\
\hline
16678\cancel{7} \\
-\quad 35 \\
\hline
1664\cancel{3} \\
-\quad 15 \\
\hline
164\cancel{9} \\
-\quad 45 \\
\hline
11\cancel{9} = 7 \cdot 17 \\
-\ 45 \\
\hline
-34 = -2 \cdot 17
\end{array}
$$

Erklärung

Die letzte Ziffer streichen und das entsprechende Vielfache von 5 von der verbleibenden Zahl abziehen bedeutet, ein entsprechendes Vielfaches von 51 abzuziehen und die Differenz dann durch 10 zu teilen.

Beispiel

$$
\begin{array}{r}
12345 \\
255 = 5 \cdot 51 \\
\hline
12090 : 10 \\
1209
\end{array}
$$

(äquivalent)

Ist die Ausgangszahl durch 17 teilbar, so ist es auch die Zahl, die nach diesen beiden Operationen entsteht.