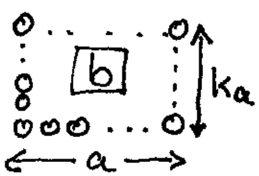
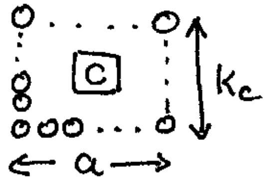
Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

Übung 5, Lösungsskizzen

1. a) $a|b$ bedeutet im Punktemuster, dass b als Rechteck mit der Breite a und der Höhe k_a dargestellt werden kann.

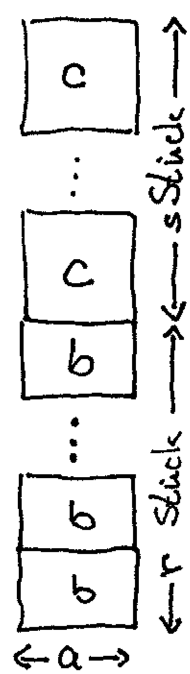




Entsprechend wird c dargestellt

$a|b+c$ bedeutet im allgem. Punktemuster, dass $b+c$ als Rechteck der Breite a und beliebiger Höhe dargestellt werden kann, das „oben glatt" ist. Das ist hier der Fall, man muss ja nur beide Rechtecke übereinander legen.

b) b und c sind wieder Rechtecke der Breit a mit „glatter Oberkante" Dann kann man beliebig viele von b und beliebig viele von c übereinander legen und das Gesamtrechteck ist immer noch „oben glatt".



2. „$\Rightarrow$" Es gilt $a|b$

Sei $k \in T_a$. D.h. $k|a$. Wegen der Transitivität der Teilerrelation gilt $k|b$ als $k \in T_b$. Also ist $T_a \subseteq T_b$

„$\Leftarrow$" Da $a|a$ gilt auch $a \in T_a$. Wegen $T_a \subseteq T_b$ gilt auch $a \in T_b$. Das bedeutet $a|b$

3. a) Abgeschlossenheit: A ist bezüglich der Multiplikation nicht abgeschlossen, denn $3 \cdot 3 = 9 \notin A$

b) Assoziativität: Die Multiplikation ist auf $\mathbb{N}$ assoziativ, also auch auf $A \subset \mathbb{N}$

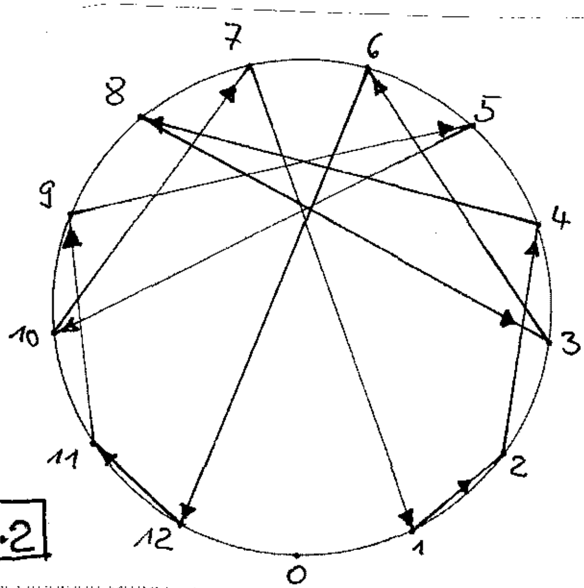
c) neutrales Element: 1 ist neutrales Element

d) inverses Element: $\frac{1}{3} \leftrightarrow 3$ und $1 \leftrightarrow 1$

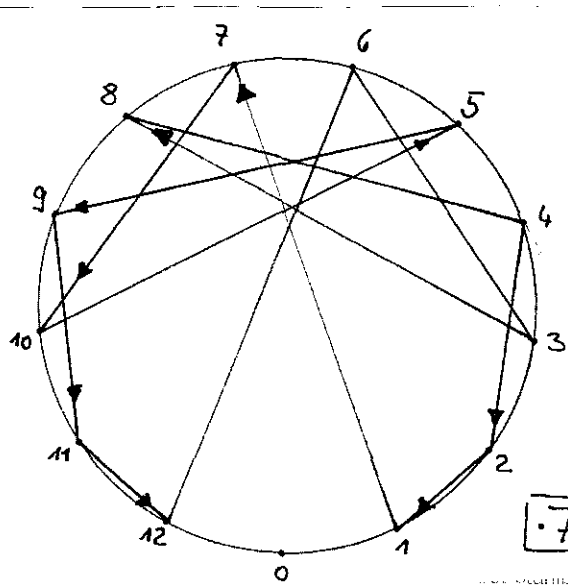
Hausübungen

4. a) Da $14 \equiv 1 \mod 13$ ergeben $\cdot 2$ und $\cdot 7$ das gleiche Diagramm

$27 \equiv 1 \mod 13$ also $\cdot 3$ und $\cdot 9$

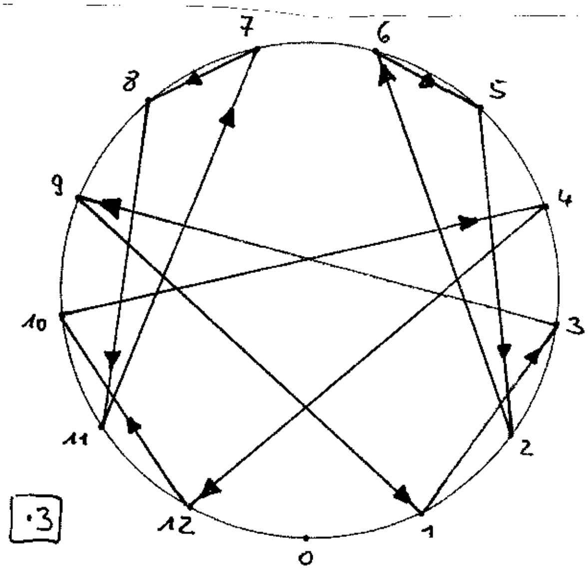


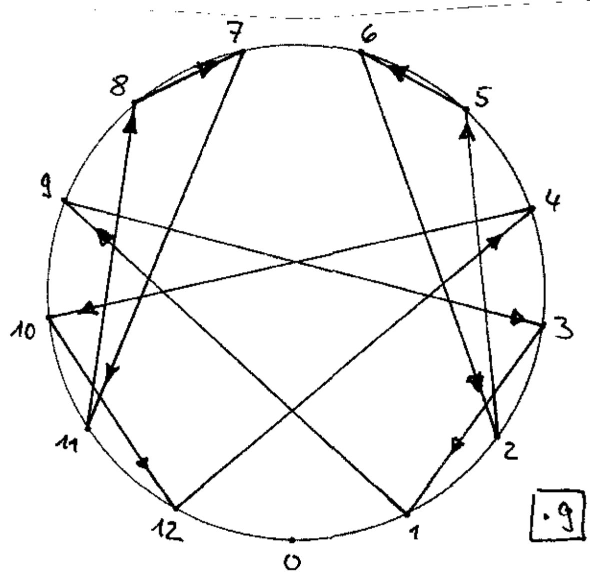
$\boxed{\cdot 2}$



$\boxed{\cdot 7}$

3





b) Zeichnet man die Diagramme, so werden in beiden die gleichen Punkte verbunden. Wird in dem einen $(\cdot a)$ n mit r verbunden $n, r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, so auch im anderen. Die Pfeile zeigen aber im zweiten Diagramm in die entgegengesetzte Richtung

Also $n \xrightarrow{\cdot a} r \qquad r \xrightarrow{\cdot b} n$

formal n verbunden mit r, $n \cdot a = k \cdot m + r$

r verbunden mit n, $r \cdot b = k' m + r'$

Behauptung: Seien $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $a \cdot b \equiv 1 \mod m$. Sei $n \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ mit $n \cdot a = k \cdot m + r \quad r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Dann gilt: $r \cdot b = k' \cdot m + n$

c) Beweis.

Wir betrachten rb Aus $na = km + r$ folgt

$$nab = kbm + rb$$

Also gilt $nab \equiv rb \mod m$

Wegen $ab \equiv 1 \mod m$ folgt

$n \equiv rb \mod m$ und damit $rb - n = k'm$

also $rb = k'm + n \quad k' \in \mathbb{Z}$ q.e.d.

5 a) $a | b \Rightarrow \exists k_b^{\in\mathbb{N}} : b = k_b a$

$a | c \Rightarrow \exists \underset{\in\mathbb{N}}{k_c} : c = k_c \cdot a$

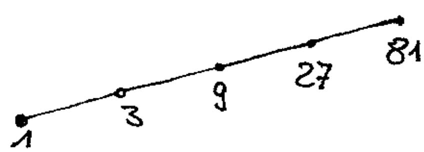
$b + c = k_b a + k_c a = \underbrace{(k_b + k_c)}_{\in\mathbb{N}} a$

Also folgt $a | b+c$

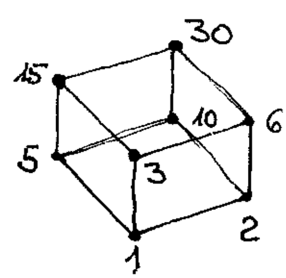
b) $a | b \Rightarrow \exists k_b \in \mathbb{N} : b = k_b a$ Sei $c \in \mathbb{N}$ beliebig.

Dann gilt: $bc = \underbrace{k_b c}_{\in\mathbb{N}} a$ Also: $a | bc$

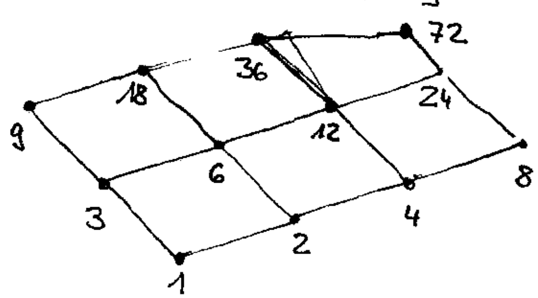
6. a) $T_{81} = \{1, 81, 3, 27, 9\}$



b) $T_{30} = \{1, 30, 2, 15, 3, 10, 5, 6\}$



c) $T_{72} = \{1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18,$
$6, 12, 8, 9\}$



7. Es muss eine Quadratzahl sein der Form

$n = (p_1 \cdot p_2)^2$ mit p_1 und p_2 Primzahlen

z.B. $n = (2 \cdot 3)^2 = 36$ oder $n = (2 \cdot 5)^2 = 100$

oder $n = (3 \cdot 5)^2 = 225$