Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, Wi Se 2006/07

Übung 3 Lösungsskizzen

1. a) Es gibt einen Menschen in diesem Hörsaal, der nicht Mathematik studiert.
   b) Alle meine Tulpenzwiebeln sind aufgegangen.
   c) Es gibt in dieser Klasse (wenigstens) einen Schüler, der weder in Mathe noch in Englisch gut ist. [„weder A noch B": $\neg A$ und $\neg B$]

2. Man teilt 4839267 durch 38429 und erhält 125,92747... Also passt 38429 125 Mal ganz in 4839267 mit einem Rest, der durch die Ziffern hinter dem Komma gegeben ist. Also zieht man vom Ergebnis 125 ab und erhält 0,92747.... . Multipliziert man das mit 38429 so erhält man den ganzzahligen Rest. Rundungsfehler können zu nicht ganzzahligen Ergebnissen führen. Dann muss man mit Runden und Endstellenprobe das Ergebnis ermitteln

   $0{,}92747\ldots \cdot 38429 = 35641{,}9999$

   Also: $4839267 = 125 \cdot 38429 + 35642$

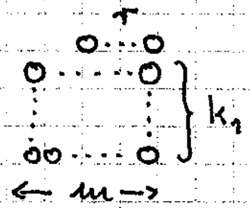
   Endstellenprobe: $5 \cdot 9 = 45$ $\quad 5+2 = 7$ stimmt

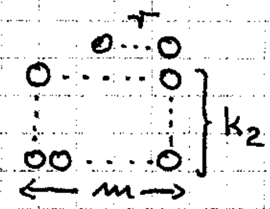
3. Beispiel: $15 = 2 \cdot 6 + 3$ und $27 = 4 \cdot 6 + 3$
   (mod 6)
   $\Rightarrow 27 - 15 = 12 = 2 \cdot 6$

   umgekehrt: $5 + 18 = 23$ also $23 - 5 = 18 = 3 \cdot 6$

   $23 = 3 \cdot 6 + 5$ und $5 = 0 \cdot 6 + 5$

3 (Forts.) Punktemuster allgemein mod m

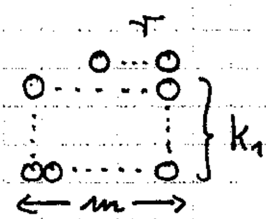




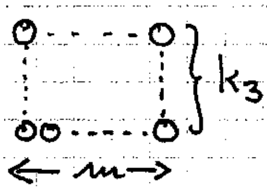
$a = k_1 \cdot m + r$ $\qquad$ $b = k_2 \cdot m + r$

Zieht man beide Zahlen voneinander ab, so ergeben die beiden gleichen, unvollständigen Zeilen Null. Bleiben die vollständigen Zeilen, die voneinander abgezogen vollständige Zeilen ergeben. D.h., dass die Differenz durch m teilbar ist.

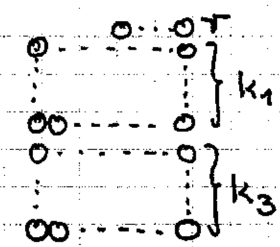
umgekehrt: $a = m \cdot k_1 + r$



Ist der Unterschied von a und b durch m teilbar heißt das: $b - a$: $= m \cdot k_3$



b erhält man nun durch $a + (b-a) = b$



Die obere, unvollständige Reihe ist dann die von a, denn der „Sockel" von $b-a$ besteht aus vollständigen Zeilen.

<u>formal</u> "$\Rightarrow$" Sei $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$

Dann ist $a - b = (k_1 m + r) - (k_2 m + r)$

$= k_1 m - k_2 m$

$= (k_1 - k_2) m$ also durch m teilbar

3 (Forts.) formal „$\Leftarrow$"

Differenz $b - a = k_3 m$.

Sei a eine beliebige Zahl. ~~m~~ Dann gibt es

Zahlen k_1, r mit $a = k_1 m + r$

Dann ist
$$b = a + (b-a) = k_1 m + r + k_3 m = (k_1 + k_3) m + r$$

Also ist der Rest von b so groß wie der von a.

HAUSÜBUNGEN

4. a) 26 hat die Quersumme 8, ist aber nicht durch 8 teilbar.

b) 88 hat die Quersumme 16 und ist auch durch 8 teilbar.

c)

Logische Form $\forall n \in \mathbb{N}: A \Rightarrow B$

Verneinung $\neg(\forall n \in \mathbb{N}: A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \neg(A \Rightarrow B)$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A$ oder $B) \Leftrightarrow A$ und $\neg B$

also endgültige Form: $\exists n \in \mathbb{N}: A$ und $\neg B$

„Es gibt eine natürliche Zahl, d~~e~~eren Quersumme durch 8 teilbar ist, die aber selbst nicht durch 8 teilbar ist"

5. (Eine Freundin aus dem Bankbereich lächelte müde bei dieser Aufgabe: „Das weiß doch jeder!")

a) 15.11.2006 + 365 Tage 15.11.2007

$365 = 52 \cdot 7 + 1$ Also rückt der Wochentag nach einem Jahr um 1 weiter, von Mittwoch auf Donnerstag.

b) 2008 ist Schaltjahr. Also kommen 366 Tage dazu. Wochentag Donnerstag (07) +2 Samstag (09)

6a) $1 = 1^2$

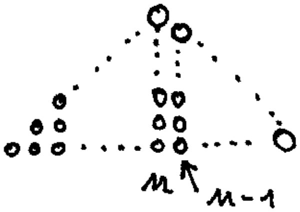
$1 + 2 + 1 = 2^2$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$

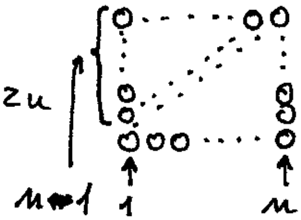
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

allgemein

$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n-1) + \cdots + 1 = n^2$

b) 

umlegen zu



c) $\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{D(n)} + \underbrace{(n-1) + \cdots + 1}_{D(n-1)}$

$D(n) + D(n-1)$

$$D(n) + D(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$= 2\,\frac{n^2}{2}$$

$$= n^2$$

7. a) $n=2$ $\quad D(4)=10 \quad D(2)=3 \quad D(1)=1$

$$10 = 3\cdot 3+1 \quad ✓$$

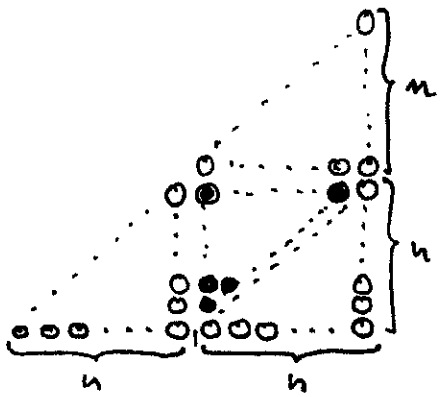
$n=3$ $\quad D(6)=21 \quad D(3)=6 \quad D(2)=3$

$$21 = 3\cdot 6+3$$

$n=5$ $\quad D(10)=55 \quad D(5)=15 \quad D(4)=10$

$$55 = 3\cdot 15+10$$

b)



Das Dreieck ● im Zentrum ist ein $(n-1)$-Dreieck, die anderen drei Dreiecke sind n-Dreiecke.

c) $D(2n) = \frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(2n+1)$

$D(n) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \qquad D(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)\,n$

$$\begin{aligned}
3\cdot D(n)+D(n-1) &= \frac{3}{2}\,n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)\cdot n \\
&= \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n \\
&= 2n^2+n \\
&= n(2n+1) \\
&= \frac{1}{2}\,2n(2n+1) = D(2n)
\end{aligned}$$