Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 06/07

Übung 1, Lösungsskizzen

a) $278 \cdot 7 = 1946$ $\quad$ $194 - 2 \cdot 6 = 182$

$18 - 2 \cdot 2 = 14$

$925 \cdot 7 = 6475$ $\quad$ $647 - 2 \cdot 5 = 637$

$63 - 2 \cdot 7 = 49$

$876 \cdot 7 = 6132$ $\quad$ $613 - 2 \cdot 2 = 609$

$60 - 2 \cdot 9 = 42$ $\quad$ $(4 - 2 \cdot 2 = 0)$

$783 \cdot 7 = 5481$ $\quad$ $548 - 1 \cdot 2 = 546$

$54 - 2 \cdot 6 = 42$

b) $528 \cdot 7 + 2 = 3698$ $\quad$ $369 - 2 \cdot 8 = 353$

$35 - 2 \cdot 3 = 29$

$246 \cdot 7 + 3 = 1725$ $\quad$ $172 - 2 \cdot 5 = 162$

$16 - 2 \cdot 2 = 12$

$613 \cdot 7 + 5 = 4296$ $\quad$ $429 - 2 \cdot 6 = 417$

$41 - 2 \cdot 7 = 27$

Die Rechnung in a) führt auf immer kleinere Zahlen, die durch 7 teilbar sind. Man kann die Rechnung abbrechen, wenn man auf eine Zahl kommt, von der man auswendig weiß, dass sie durch 7 teilbar ist.

Größere Zahlen: $48216 \cdot 7 = 337512$

$33751 - 2 \cdot 2 = 33747$ $\quad$ $3374 - 2 \cdot 7 = 3360$

Nullen am Ende kann man sofort streichen

$33 - 2 \cdot 6 = 21$

zu c)

Eine nicht durch 7 teilbare Zahl:

$6273 \cdot 7 + 5 = 43916$ $\quad$ $4391 - 2 \cdot 6 = 4379$

$437 - 2 \cdot 9 = 419$ $\quad$ $41 - 2 \cdot 9 = 23$ $\quad$ nicht durch 7 teilbar

d) Die Rechenoperation bedeutet, dass man gerade so oft 21 abzieht, dass eine durch 10 teilbare Zahl entsteht (0 am Ende). Ist die Ausgangszahl durch 7 teilbar, so ist auch die veränderte Zahl durch 7 teilbar, denn das abgezogene Vielfache von 21 ist es auch.
Ist die Ausgangszahl nicht durch 7 teilbar, so sind auch alle Zwischenergebnisse nicht durch 7 teilbar.

2a) $U = \{ u \mid u = 2i - 1 \, , \, i \in \mathbb{N} \}$, $u = 2i - 1$

b) $R = \{ t \mid t = 5n + 3 \, , \, n \in \mathbb{N}_0 \}$, $t = 5n + 3$

c) $M = \{ a \mid a = k^2 - 1 \, , \, k \in \mathbb{N} \}$, $a = k^2 - 1$

d) $K = \{ z \mid z = 10a + a + 1 \, , \, a \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \}$

$z = 10a + a + 1$

3. Argumentativ:
Die Quersumme ist die Einerziffer plus ein Mal die Zehnerziffer. Die zweistellige Zahl ist die Einerziffer plus zehn Mal die Zehnerziffer. Da die Zehnerziffer mindestens 1 ist, ist die Zahl größer als die Quersumme

Formal: Sei a die Zehner-, b die Einerziffer

Zahl n : $n = 10a + b$ Quersumme q : $q = a + b$

Behauptung: $n > q$

Beweis: Da $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ gilt: $10a > a$

$\Rightarrow \quad 10a + b > a + b$

$\Rightarrow \quad n > q$ q.e.d.

4. Übersicht über die Gäste (Anfangsbuchst.)
und Lösung: + kommt, − kommt nicht, ? unklar
Kurzform der Sätze:

1. $H \Leftrightarrow P$ 2. J + 3. $P \Rightarrow A$
4. entweder C oder H 5. S −
6. J und S $\Rightarrow$ nicht Z 7. $S \Leftrightarrow H$

P	H	J	S	A	C	Z
−	−	+	−	?	+	?

5. a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $a, c \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
oder $k \in \mathbb{N}$

c) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$

e) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $a \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

6. a)
$$\begin{array}{r} 743 \\ -347 \\ \hline 396 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 655 \\ -556 \\ \hline 099 \end{array} \quad \begin{array}{r} 990 \\ -099 \\ \hline 891 \end{array} \quad \begin{array}{r} 981 \\ -189 \\ \hline 792 \end{array} \quad \begin{array}{r} 972 \\ -279 \\ \hline 693 \end{array}$$

+1

−1

- Die Differenzen haben eine 9 als Zehnerziffer, Hunderter- und Einerziffer ergänzen sich zu 9
- Von Rechenschritt (ab der 1. Differenz) zu Rechenschritt nimmt die Einerziffer um 1 zu, die

Hunderterziffer um 1 ab.

b) Wegen $a<b<c$ ist die größte Zahl

$$100c + 10b + a$$

und die kleinste $\quad 100a + 10b + c$

Differenz: $\quad 100(c-a) \quad + (a-c)$

Da $a<c$, ist $a-c$ negativ, also keine Ziffer.

„1 im Übertrag" ergibt $\quad 100(c-a) - 10 + 10 + a - c$

$$= 100(c-a) - 10 + 10 - (c-a)$$

Nun ist die Zehner„ziffer" -1, also noch ein Übertrag:

$$\underbrace{100(c-a) - 100}_{\text{Hunderter}} + \underbrace{10 \cdot 10 - 10}_{\text{Zehner}} + \underbrace{10-(c-a)}_{\text{Einer}}$$

$$= 100 \cdot (c-a-1) + 10 \cdot 9 + 10 - (c-a)$$

Also: Hunderterziffer $\quad h = c-a-1$

Zehnerziffer $\quad z = 9$

Einerziffer $\quad e = 10-(c-a)$

An den konkreten Beispielen hatten wir $h+e = 9$ festgestellt. Nachrechnen: $h+e = c-a-1+10-(c-a)$

$$= c-a-1+10-c+a = 9$$

7

a	b	c	a und (b oder c)		(a und b) oder (a und c)		
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	f	w	f	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f
			2.	1.	3.	5.	4.

gleich