Grundsätzliches: Eine Klausur ist eine Gelegenheit, dem Prüfer zu zeigen, was Sie alles wissen. Es ist also in Ihrem Interesse, dass Ihre Ausführungen lesbar, verständlich und logisch nachvollziehbar sind. Für Studierende des Lehramts ist eine Klausur immer auch eine Prüfung für die Fähigkeit, mathematische Dinge klar und verständlich darzustellen.

1. Logik
   a. Gegeben ist die Aussagenform $\neg A \Rightarrow B$. Dann gilt genau eine der vier Aussagen:
   A ist notwendig für B A ist hinreichend für B
   A ist notwendig für ¬B A ist hinreichend für ¬B
   Welche ist richtig und warum?
   b. Nun geht es wieder einmal um Spielmarken, die auf der Vorderseite einen Buchstaben haben und auf der Rückseite eine Zahl. Zu diesen Spielmarken betrachten wir die Bedingung:
   „Wenn auf der Vorderseite der Buchstabe ein Vokal ist und auf der Rückseite die Zahl gerade ist, dann ist die Zahl auf der Rückseite eine 5.“
   (Diese Bedingung ist genau so gemeint, auch wenn sie Ihnen unsinnig vorkommt.)
      i. Geben Sie ein Beispiel für eine Spielmarke an, die dieser Bedingung widerspricht.
      ii. Gibt es Spielmarken, die dieser Bedingung nicht widersprechen?
      Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, und erläutern Sie, weshalb die Bedingung erfüllt ist.
      Wenn nein, begründen Sie warum nicht.

2. Kombinatorik
   A) Bahnkarten in Budapest

> zur Erinnerung
>
> Die abgebildeten Bahn- und Metrokarten stammen aus Budapest. Die linke Karte wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei werden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Auf der rechten Karte befindet sich gemäß der neuen Entwertungsmethode ein Stempel, der das Datum und die Uhrzeit enthält.
> Zu dieser Änderung ist es gekommen, da der ungarische Mathematiker Ödön Vancso die Verwaltung des örtlichen Nahverkehrs darauf hingewiesen hat, dass man gestanzte Karten doch auch sammeln könne. Verfügt man über alle möglichen Stanzmuster, so legt man nur einen Streifen Papier in den Stanzautomat und sucht in der Sammlung anschließend die passende bereits vorgestanzte Karte.
> Wie viele solcher Karten müsste man sammeln, um alle möglichen Stanzmuster zu besitzen?
>
> 

In der Aufgabe „Fahrkarten in Budapest“ wurden in einem Neunerfeld 2, 3 oder 4 Zahlen gelocht. Die Anzahl aller verschiedenen Lochungen war $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=246$.

   a. Zur Verbesserung schlägt jemand vor, den 4 Stanzstiften verschiedene Formen zu geben, z.B. ✙ ○ △ ◇
   Dafür werden immer 4 Löcher gestanzt, da genau diese 4 Stifte in die Stanzmaschinen eingesetzt werden. Wie viele Lochungen gibt es nun? Erläutern Sie Ihre Überlegungen durch Text.
   b. Noch besser wäre es, wie vorher 2, 3 oder 4 Löcher zuzulassen. Dazu werden 2, 3 oder 4 Stifte aus den 4 vorhandenen ausgewählt und in die Stanzmaschinen eingesetzt. Wie viele Lochungen gibt es nun? Erläutern Sie Ihre Überlegungen durch Text.

B) Beim Skatspiel werden 32 Karten verteilt. Die 3 Spieler bekommen je 10 Karten, 2 Karten gehen in den „Skat“. Für die Aufgabe: „Wie viele Kartenverteilungen gibt es?“ sehen Sie zwei richtige Lösungen:

c. $\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2}$ Was hat sich die Person bei dieser Lösung gedacht?

d. $\frac{32!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 2!}$ Was hat sich die Person bei dieser Lösung gedacht?

e. Zeigen Sie, dass man die Lösung aus c. umformen kann in die Lösung aus d.

3. Teilbarkeitsregeln und Modulorechnung

   Eine Zahl der Form $5x211$ soll durch 29 teilbar sein.
   (x ist die unbekannte Tausenderziffer der Zahl)

   a. Zeigen Sie, dass das Problem umgeformt werden kann in die Aufgabe:
      Was sind die ganzzahligen Lösungen von $14x - 29k = -12$?
   b. Eine Lösung der Gleichung ist $x = 24$ und $k = 12$. Wie erhält man diese Lösung?
   c. Begründen Sie auf der Basis von a. und b., dass die ursprüngliche Aufgabe keine Lösung hat.

4. andere Basissysteme

   (Die Basiszahl ist jeweils als Index an die angehängt.
   Zahlen ohne Index sind stets im Zehnersystem gemeint.)

   a. Umwandlungen *(Die einzelnen Rechenschritte sind Teil der Bewertung)*
      i. Wandeln Sie 97_{10} um in das Zweiersystem.
      ii. Wandeln Sie 13142_5 um in das Zehnersystem.
      iii. Wandeln Sie $A7_{16}$ um in das Zweiersystem (Achtung: Hier ist ein schneller Weg möglich.)
   b. In welchem Basissystem ist 41605_b teilbar durch
      i. b?
      ii. b+1?

5. vollständige Induktion

   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$