1. a) Richtig ist (1) A ist notwendig für $\neg B$

Denn das heißt $\neg A \Rightarrow \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$ (1)

b) i) Vorders: A Rücks: 2 (1)

Die Vorauss. sind erfüllt, die Folgerung nicht (1)

ii) Ja. Alle Spielmarken, die die Bedingung nicht erfüllen, widersprechen nicht der Bedingung („Ex falso quod libet")

z.B. Vorders. A Rücks 7

Vorders B Rücks 6 (2)

6

2. a) Unterschiedliche Form $\rightarrow$ Berücksichtigung der Reihenfolge: also $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

ohne Wiederholung: 1 $= 3024$ 1

b) Auswahl von Stiften | Anzahl Stanzungen

2 aus 4: $\binom{4}{2} = 6$ $\quad 9 \cdot 8 = 72$ 2

3 aus 4: $\binom{4}{3} = 4$ $\quad 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ 2

4 aus 4: s.o. $\binom{4}{4} = 1$ $\quad 3024$

Also gibt es insgesamt $6 \cdot 72 + 4 \cdot 504 + 3024$
$= 5472$

Stanzungen 1

---

c) $\binom{32}{10}$ Ziehen von 10 Karten aus 32

Bleiben 22 Karten über. Ziehen von 10

$\rightarrow \binom{22}{10}$ Bleiben 12 Karten über. Ziehen von 10

$\rightarrow \binom{12}{10}$ Restlichen 2 Karten i. d. Skat $\binom{2}{2}$ 2

d) Man legt alle 32 Karten nebeneinander und schreibt darunter 10 Mal „1", 10 Mal „2", 10 Mal „3" und 2 Mal „S". Dann ist jede Kartenverteilung eine Permutation von 32 Zeichen, von denen dreimal 10 und einmal 2 gleich sind.

$\rightarrow$ allgemeine Permutationsformel $\dfrac{32!}{10!\,10!\,10!\;2!}$ 2

---

2e) $\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2} = \dfrac{32!}{10!\,\cancel{22!}} \cdot \dfrac{\cancel{22!}}{10!\,\cancel{12!}} \cdot \dfrac{\cancel{12!}}{10!\,\cancel{2!}} \cdot \dfrac{\cancel{2!}}{2!\,0!}$

mit $0! = 1$ ergibt sich nach dem Kürzen der Bruch in d.

1

12

3 a) Gewichte für Teilbarkeit

$1 \equiv 1 \mod 29$

$10 \equiv 10 \mod 29$

$100 \equiv 13 \mod 29$

$1000 \equiv 14 \mod 29$

$10.000 \equiv -5 \mod 29$
$\equiv 24$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & x & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 14 & 13 & 10 & 1 \end{array}$$

Gewichtete QS

$-25 + 14x + 26 + 10 + 1$

$= 14x + 12$ 1,5

Die gewichtete QS ist durch 29 teilbar, wenn

$14x + 12 = 29k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 14x - 29k = -12$ 1

4

b) Offensichtlich ~~ist~~ hat $14x - 29k = 1$ 1 die Lösung

$x = 2 \; , \; k = 1$ Also hat $14x - 29k = -12$ als eine Lösung

$x = 2 \cdot 12 = 24 \; , \; k = 1 \cdot 12 = 12$ 1

2

c) $x = 24$ ist keine Lösung für das Teilbarkeitsproblem $29 \mid 5x211$, da 24 ~~x~~ keine Ziffer ist. 1

Weitere Lösungen für $14x - 29k = -12$ erhält man durch Addition/Subtraktion von $14 \cdot 29 - 29 \cdot 14 = 0$ 1

Eine Subtraktion führt von $x = 24 \quad k = 12$ zu

$x = 24 - 29 = -5 \qquad k = 12 - 14 = -2$

Also sind Lösungen mit $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$ nicht vorhanden. 1

3

4 a) i) $97 = 64 + 33$

$= 64 + 32 + 1 = 1100001_2$ 1

ii) $13142_5 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4$

$= 2 + 20 + 25 + 375 + 625$

$= 1047$ 1

iii) $A7_{16} = 10100111_2$

denn $A_{16} = 10_{10} = 1010_2$ $7 = 0111_2$

Da $16 = 2^4$, kann man jede Ziffer des 16er-Systems für sich in eine vierstellige Binärzahl umwandeln. 2

$\boxed{4}$

b) i) In <u>keinem</u> Basissystem ist $41605_b$ durch b teilbar, denn dazu müsste die Einerziffer 0 sein. 1

ii) altern. QS: $\underset{+}{4}\,\underset{-}{1}\,\underset{+}{6}\,\underset{-}{0}\,\underset{+}{5}$ $15 - 1 = 14$ 1

14 ist teilbar durch 1, 2, 7, 14

$b+1 = 1 \Rightarrow b = 0$ Unsinn

$b+1 = 2 \Rightarrow b = 1$ ebenso Unsinn

$b+1 = 7 \Rightarrow b = 6$ nicht möglich, da 6 als Ziffer auftaucht 1

$b+1 = 14 \Rightarrow b = 13$ sinnvolle Lösung 1

[Probe: $41605_{13} = 117460_{10} = 14 \cdot 8390$]

$\boxed{4}$

5

## Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A( $n$ ):

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

**Beweis durch vollständige Induktion über $n$ :**

Induktionsanfang A( $1$ ): Die Aussage gilt für $n=1$

denn:

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2 \qquad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

1

**Induktionsschluss**

Induktionsvoraussetzung A( $n$ ) : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Induktionsbehauptung A( $n$ +1) :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

1

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}_{\text{Ind. Vor.}} + (n+1)(n+2)$$

1

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

1

$$= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{3}n + 1\right]$$

1

$$= (n+1)(n+2)\,\frac{1}{3}\left[n+3\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

1

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von $n$ auf $n$+1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.