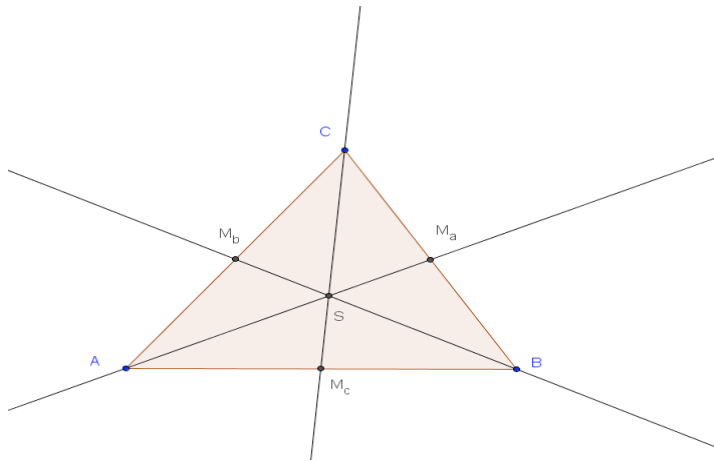


Protokoll vom 14. Mai 2009

Schwerpunkt im Dreieck



Die wesentliche Idee des Beweises:

s_a wird von s_b im Punkt S geschnitten.

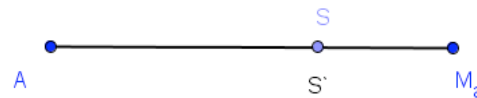
Nun beweist man, dass S s_a im Verhältnis 2:1 teilt.

s_a wird von s_c im Punkt S' geschnitten.

Analog gilt, dass S' s_a im Verhältnis 2:1 teilt.

Also sind S und S' gleich.

Also schneiden sich die Seitenhalbierenden s_a , s_b und s_c in einem Punkt. (D.h. sie sind konkurrent.)



Für den Nachweis, dass sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 schneiden, gibt es zwei bekannte Argumentationen:

1. Beweis mit Dreiecken:

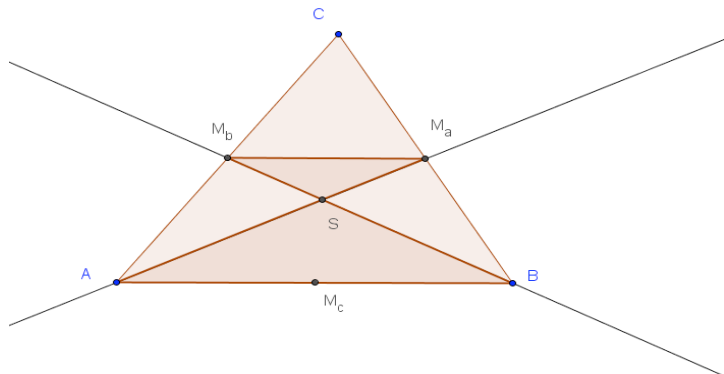
1. $M_a M_b \parallel AB$ wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatz (Zentrum C).

2. $\frac{|M_a M_b|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ wegen 2. Strahlensatz

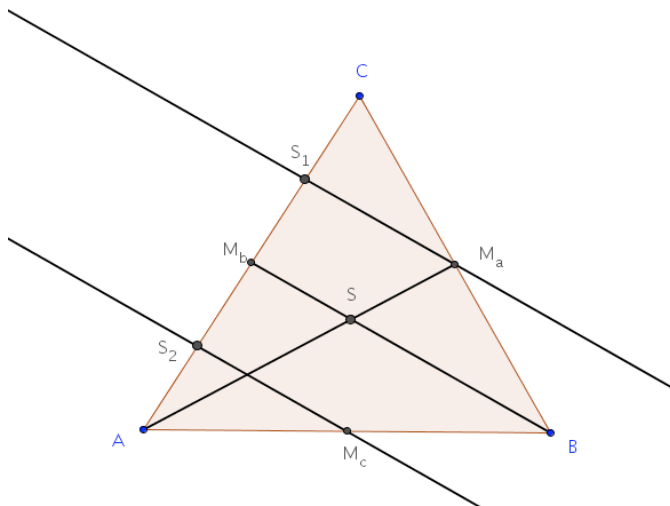
(Zentrum C).

3. $\frac{|S M_a|}{|S A|} = \frac{|M_a M_b|}{|AB|} = \frac{1}{2}$

wegen 2. Strahlensatz (Zentrum S).



2. Beweis mit Parallelen:



1. M_b ist Mitte von $\overline{AC}$

1. Strahlensatz (Zentrum C) $\frac{|CS_1|}{|CM_b|} = \frac{|CM_a|}{|CB|} = \frac{1}{2}$

2. 1. Strahlensatz (Zentrum A) $\frac{|AS_2|}{|AM_b|} = \frac{|AM_c|}{|AB|} = \frac{1}{2}$

Also sind auf $\overline{AC}$ die vier Abschnitte gleich lang: $|AS_2| = |S_2M_b| = |M_bS_1| = |S_1C|$.

3. 1. Strahlensatz (Zentrum A), Folgerung $\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{|AM_b|}{|M_bS_1|} = \frac{2}{1}$

Mittelpunkt des Feuerbachkreises

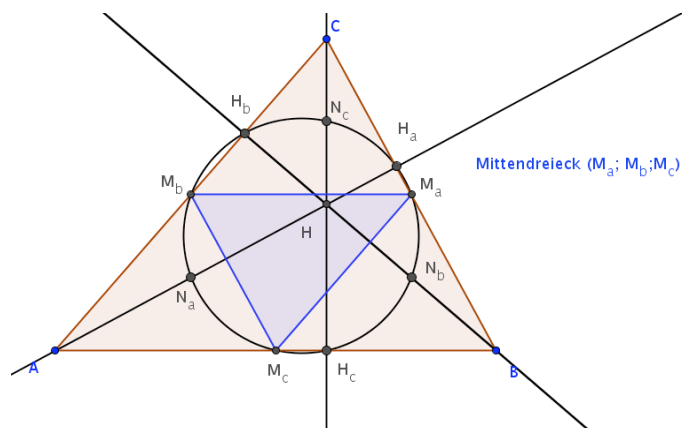
Der Feuerbachkreis ist der Umkreis des Mittendreiecks (Feuerbachscher Neun-Punkte-Kreis):

N_a halbiert $\overline{AH}$.

N_b halbiert $\overline{BH}$.

N_c halbiert $\overline{CH}$.

(Der Innkreis des $\triangle ABC$ hat einen Berührungspunkt zum Feuerbachkreis
Beweis schwierig.
→ Berührungspunkt: Feuerbachpunkt)



Unterscheidung!

Mittelpunkt Feuerbachkreis $\neq$ Feuerbachpunkt

Beweis zum Feuerbachkreis (FBK)

Wir definieren den FBK als Umkreis der Mittendreiecks $M_a M_b M_c$.

Behauptung: H_c liegt auf dem FBK.

Sei $s = \overline{M_a M_b}$ und t die Mittelsenkrechte zu $\overline{M_a M_b}$.

Betrachte die Achsenspiegelung S_s .

$S_s(C) = H_c$, denn die Höhe $\overline{CH_c}$ ist senkrecht zu AB , also auch senkrecht zu $M_a M_b$

(Parallele zu AB , Beweis mit 1. Strahlensatz, Zentrum C)

und $T = M_a M_b \cap CH_c$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CH_c}$ (1. Strahlensatz mit Zentrum C).

Sei k der Umkreis von $\triangle H_c M_a M_b$.

Betrachte die Achsenspiegelung S_t :

$S_t(M_a) = M_b$, folglich $S_t(M_b) = M_a$, und $S_t(H_c) = H_c'$.

$S_t(k) = k$, denn t ist Mittelsenkrechte von $\overline{M_a M_b}$, also liegt der Mittelpunkt von k auf t .

(Spiegelt man einen Kreis an seinem Durchmesser, wird er auf sich selbst abgebildet.)

Also ist k auch Umkreis von $\triangle M_a M_b H_c'$.

Behauptung: $H_c' = M_c$

$H_c' = S_t(H_c) = S_t(S_s(C))$

$S_t \circ S_s = D_{M', 180^\circ}$ **Zwiespiegelungssatz** und $M' = s \cap t$.

Die Strecke $\overline{CM_c}$ schneidet $\overline{M_a M_b}$ im Mittelpunkt von $\overline{M_a M_b}$, da M_c die Mitte von $\overline{AB}$ ist.
(Beweis mit 2. Strahlensatz, Zentrum C / mehrfach anwenden).

Also liegt M' auf der Seitenhalbierenden $\overline{CM_c}$ und halbiert sie. (*) (1. Strahlensatz, Zentrum C)

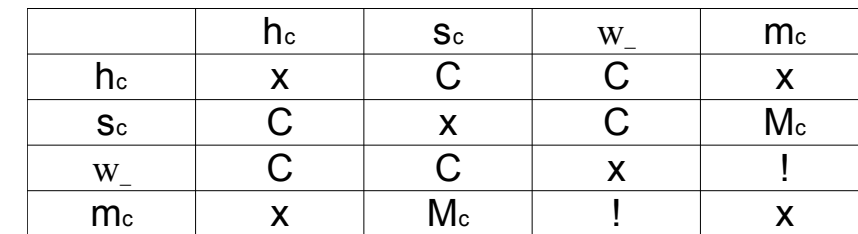
Zusammenfassung:

$S_t(S_s(C)) = S_t(H_c) = H_c' = M_c$ (letzter Schritt im Beweis(*))

Damit ist gezeigt, dass neben M_a, M_b und H_c auch M_c auf k liegt.

Da M_a, M_b, M_c auf k liegen, ist k der FBK und H_c liegt auf dem FBK. $\square$

Zu einer Dreieckecke (hier C) zeichnen wir die vier besonderen Linien h_c , s_c , w_γ und m_c .



C der Schnittpunkt ist C

- P liegt immer auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.
- Zeichnet man um P einen Kreis mit dem Radius $|PA|$, so geht dieser Kreis (durch B und) durch den Inkreismittelpunkt I.