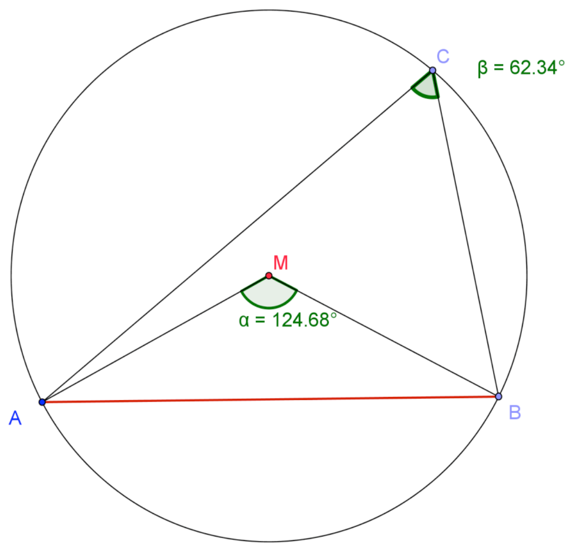
Universität Bremen
Fachbereich 3
Mathematik / Informatik
Seminar: Geometrie (für Staatsexamen)
im SoSe 2009
Dozenten: Heinz-Otto Peitgen, Reimund Albers

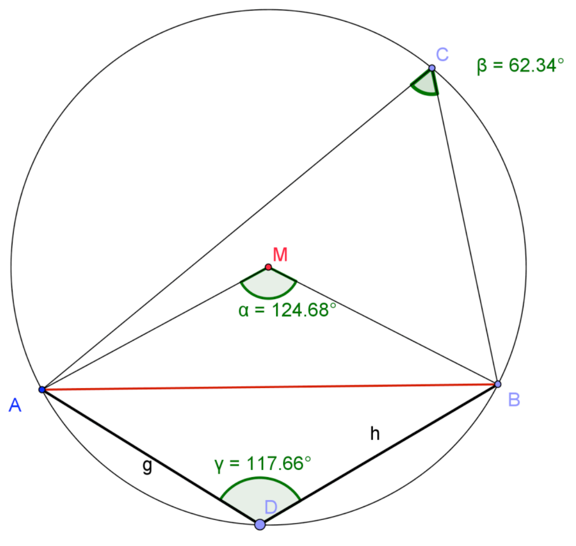
Protokoll zum 07.05.2009

Der Peripheriewinkelsatz (auch Umfangswinkelsatz)

Für alle Dreiecke *ABC*, bei denen *C* auf einem festen Kreisbogen (der *Peripherie*) über der festen Sehne *AB* liegt,
ist der Winkel ∢ACB gleich groß.



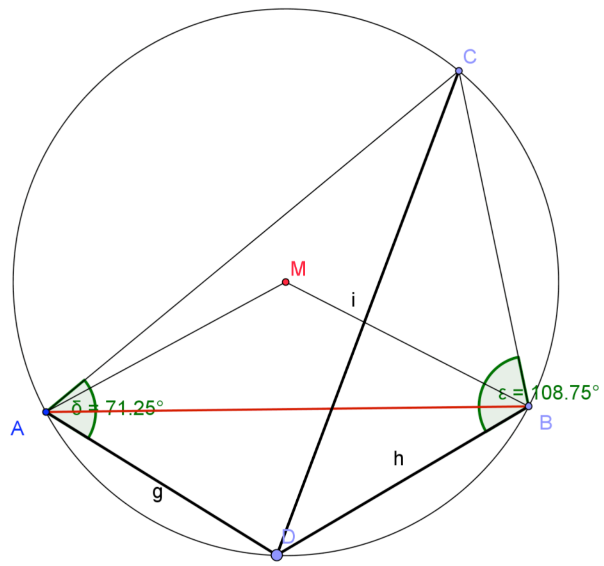
Beweisansatz: Der Mittelpunktswinkel α ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel β



Die Zeichnung wird ergänzt um einen weiteren Punkt auf dem Kreis. (D) Wir stellen fest, dass β und γ sich zusammen zu 180° ergänzen. Das Viereck ABCD ist ein Sehnenviereck, da es einen Umkreis hat. In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.

Anmerkung:

Die beiden Kreisbögen über der Sehne AB nennt man auch „Fasskreise".
Somit ergibt sich die Bezeichnung: „Fasskreis über Sehne AB zum Winkel β (62,34°)" für den in diesem Fall größeren Kreisbogen.
Und die Bezeichnung: „Fasskreis über Sehne AB zum Winkel γ (117.66°)" für den in diesem Fall kleineren Kreisbogen.



Durch das Einfügen einer weiteren Sehne $\overline{CD}$ entstehen zwei neue Fasskreise mit ebenfalls 2 neuen Peripheriewinkeln.

Da es sich hierbei immer noch um ein Sehnenviereck handelt, ergänzen sich nun auch die beiden Winkel δ und ε zu 180°.

Bewegt sich C auf dem Kreisbogen BA (oberhalb der Sehne), so ist der Winkel $\sphericalangle ACB$ stets gleich groß.

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AC'B|$$

Zu einer Sehne ist der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel.

$$|\sphericalangle AMB| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$$

Die beiden Peripheriewinkel auf den verschiedenen Kreisbögen zur Sehne ergänzen sich zu 180°.

$$|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BDA| = 180°$$

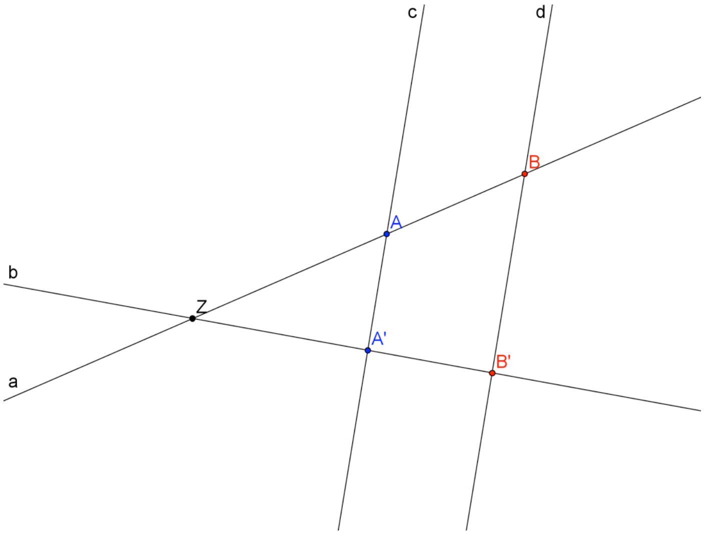
Umkehrung

Sind die beiden Winkel bei C und C' gleich groß und liegen sie über derselben Strecke $\overline{AB}$, so liegen die vier Punkte A, B, C und C' auf einem Kreis.

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AC'B| \Rightarrow \exists \text{ Kreis } K: \text{ A, B, C, C'} \in K$$

Sekantensatz

Betrachte vorab die Strahlensatz-Figur. Was ist gegeben?



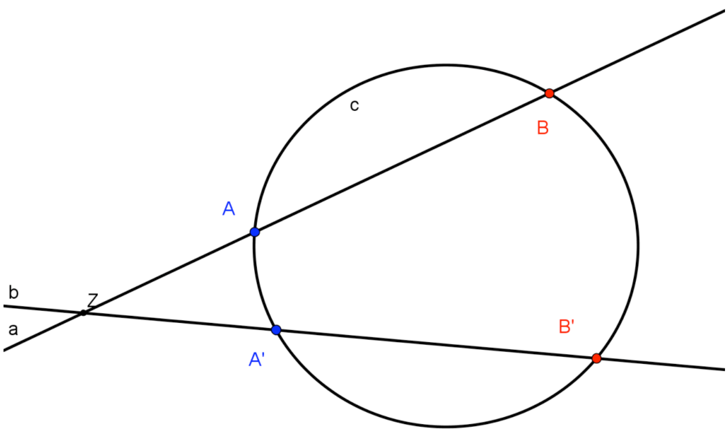
geg: 2 Strahlen a, b
2 Parallelen c, d

Die beiden Strahlen a, b schneiden sich in Z.
Durch den Schnitt von a (b) mit mit c ergibt sich A (A’) als Schnittpunkt.
Durch den Schnitt von a (b) mit d ergibt sich B (B’) als Schnittpunkt.

Es gilt: $\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZA'|}{|ZB'|}$

↓ Eine ähnliche Situation liegt beim Sekantensatz vor:

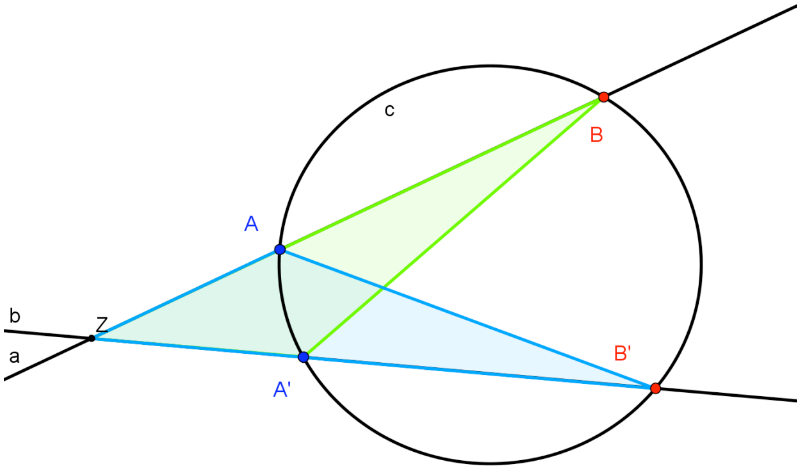
Einschub: *Sekanten schneiden den Kreis zweimal*
Tangenten berühren den Kreis in einem Punkt
Passanten schneiden oder berühren den Kreis gar nicht



Es gilt: IPAI *IPBI = IPA’I * IPB’I

Beweis:

1. konstruiere zwei Hilfsdreiecke △ ZA'B und △ZAB'



Sind die Dreiecke ähnlich?

„Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn sie in den entsprechenden 3 Winkeln übereinstimmen"

Beweis der Ähnlichkeit:

I<A'ZBI = I<B'ZAI (die Winkel sind identisch)
I<ABA'I = I<AB'A'I (es gilt der Peripheriewinkelsatz
(Sehne AA', B, B' liegen auf demselben Fasskreis)

I<ZAB'I = IBA'ZI (Satz über die Winkelsumme im Dreieck)

qed.

Aus der Ähnlichkeit folgt: Das Verhältnis entsprechender Seiten ist gleich.

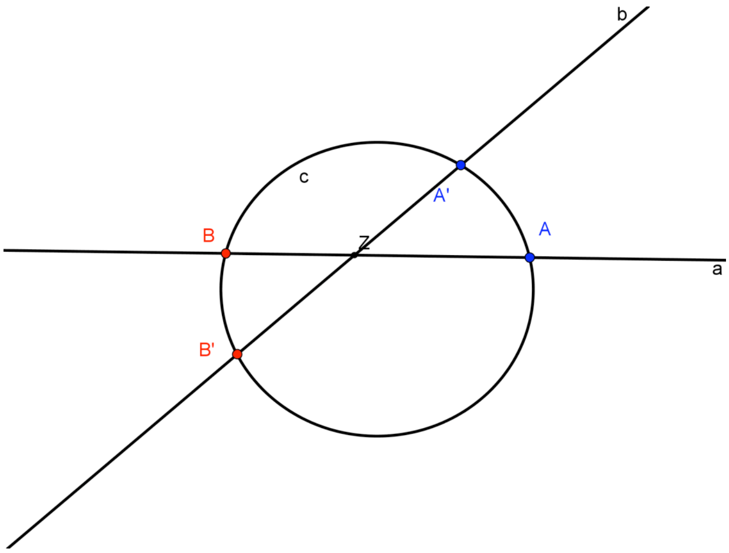
$$\frac{IZAI}{IZA'I} = \frac{IZB'I}{IZB\,I} \quad \text{(Kreuzmultiplikation)} \Longleftrightarrow \quad IZAI * IZBI = IZA'I * IZB'I$$

qed.

Sehnensatz

Schneiden sich die beiden Sekanten innerhalb des Kreises, nennt man den Sekantensatz „Sehnensatz“

Es gilt: Zwei Sehnen, die sich innerhalb des Kreises schneiden sind gleich in ihrem Produkt der Sehnenabschnitte.



IZBI * IZAI = IZB’I * IZA’I

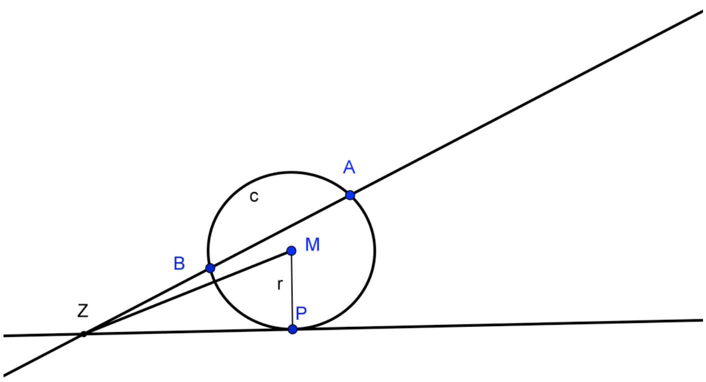
Sekanten-Tangentensatz

Liegen A’ und B’ in einem Punkt ergibt sich eine Grenzlage.

$\triangle$ ZPM = rechtwinklig

daraus folgt:

IZAI * IZBI = IZPI ²



Mit Pythagoras ergibt sich : IZAI * IZBI = IZMI² - r²