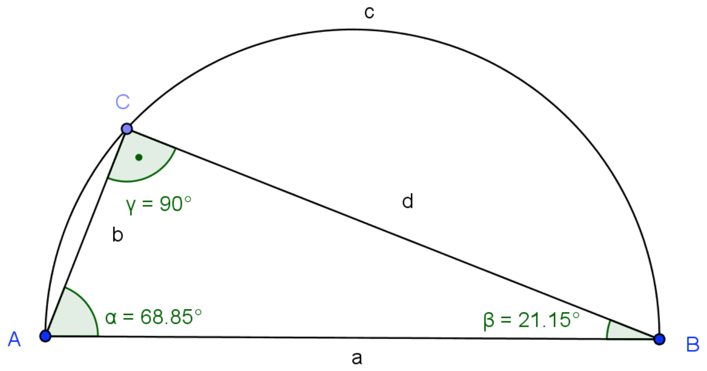
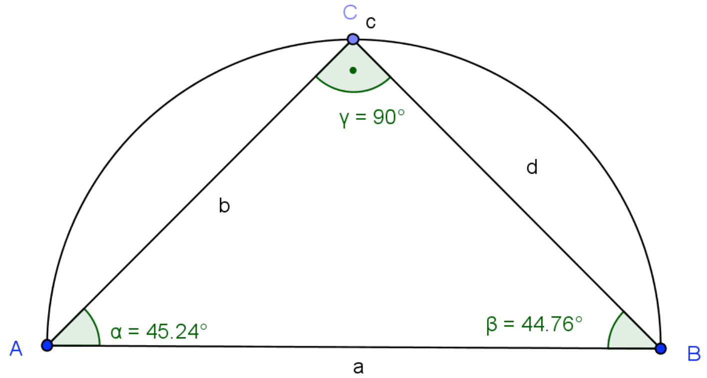
Peripheriewinkelsatz (auch Umfangswinkelsatz)

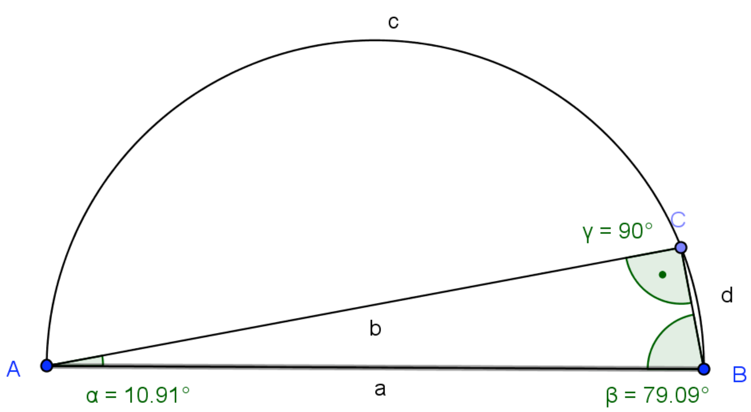
Für die Einführung des Peripheriewinkelsatzes (auch Umfangwinkelsatz) machen wir uns mit dem Satz des Thales vertraut.

Der Satz des Thales besagt, dass Dreiecke, deren längste Seite der Durchmesser eines Kreises ist, genau dann rechtwinklig sind, wenn der dritte Punkt auf dem Bogen des Kreises liegt.

Beispiele (einige Zeichnungen):







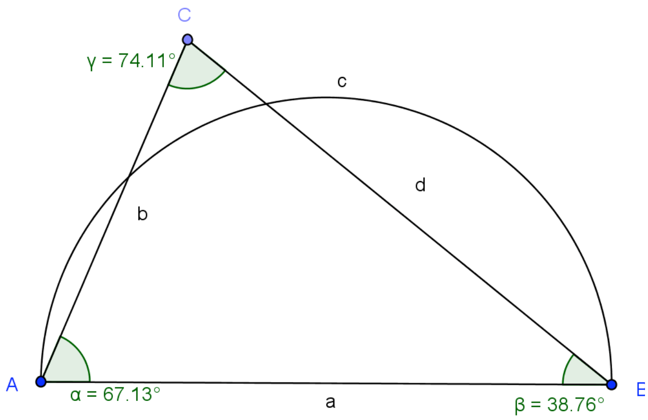
Didaktisch gesehen ist es schöner, wenn man den Punkt C aus dem Kreis zieht. Denn in den obigen Beispielen tut sich dynamisch gesehen nichts Überragendes.

Wir wissen, wenn sich der Punkt C auf dem Halbkreis befindet, dass der Winkel immer 90° beträgt.

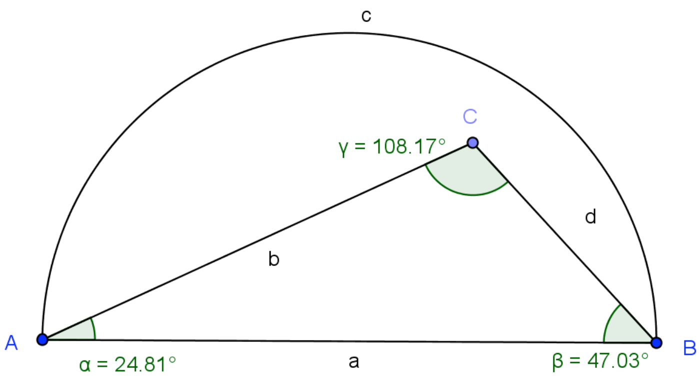
Was passiert, wenn wir den Punkt C aus dem Kreis ziehen?

Beispiele:

a) Punkt C befindet sich außerhalb des Halbkreises



b) Punkt C befindet sich innerhalb des Halbkreises

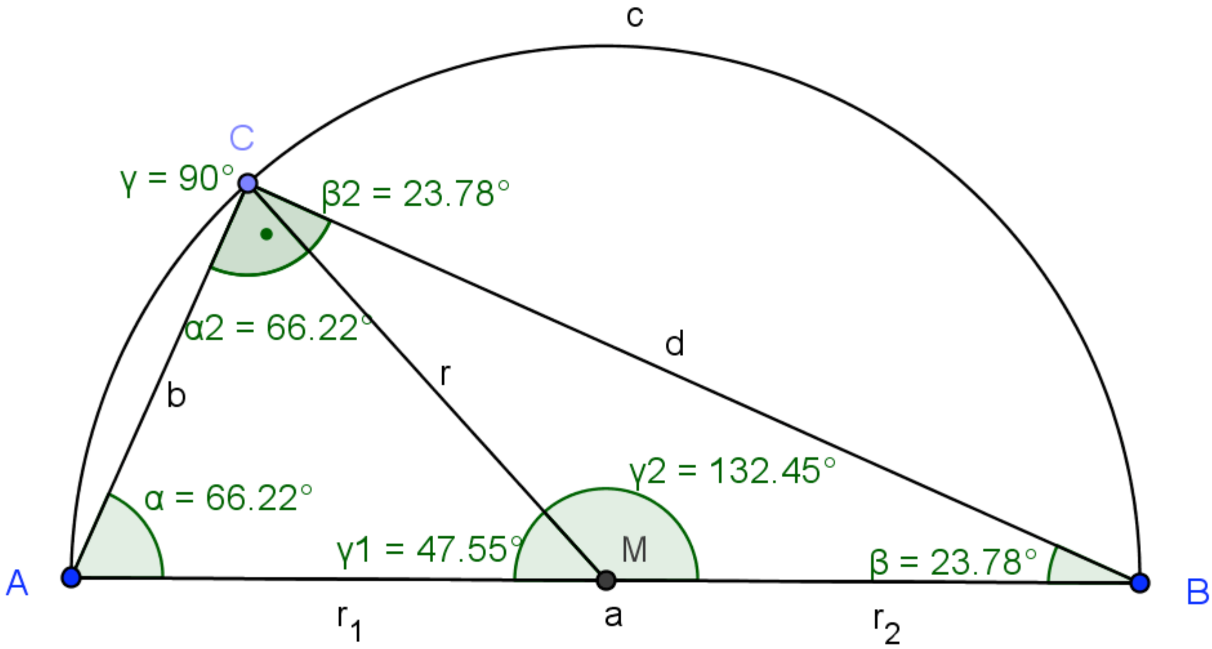


Zusammengefasst:

- Punkt C auf dem Halbkreis -> Winkel immer genau 90°
- Punkt C außerhalb des Halbkreises -> Winkel immer unter 90°
- Punkt C innerhalb des Halbkreises -> Winkel immer über 90°

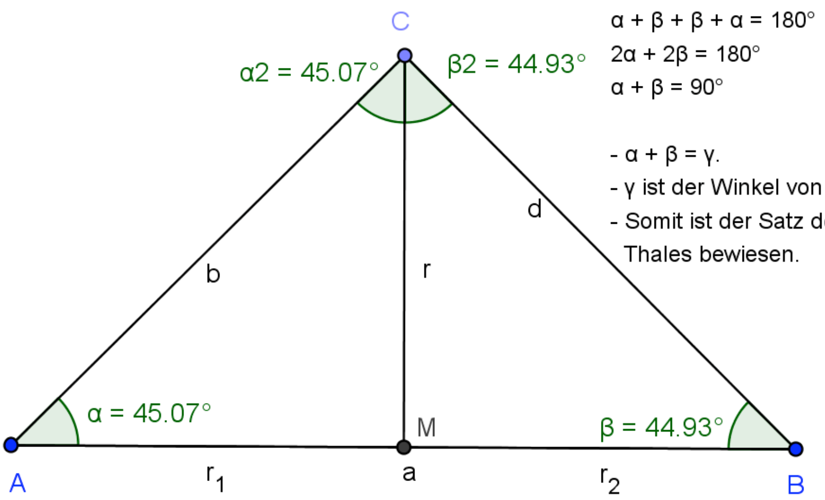
Der Beweis des „Satz des Thales“:

Bewiesen werden soll, dass der Punkt C immer einen Winkel von 90° hat. Hierfür markieren wir den Mittelpunkt der Strecke A und B.



Wenn wir den Mittelpunkt auf der Strecke A und B festgelegt haben und Punkt M mit dem Punkt C verbinden, sehen wir, dass die Strecken AM, BM und CM jeweils Radien des Kreises sind und somit auch gleich lang. Da beide Teildreiecke (AMC und MBC) jeweils zwei dieser Radien als Seiten haben, müssen beide gleichschenklig sein. In gleichschenkligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich groß. In der Zeichnung gilt also:
$\alpha = \alpha_2$ und $\beta = \beta_2$ (was uns die gemessenen Winkel zeigen).

Wir greifen uns das Dreieck ABC raus:



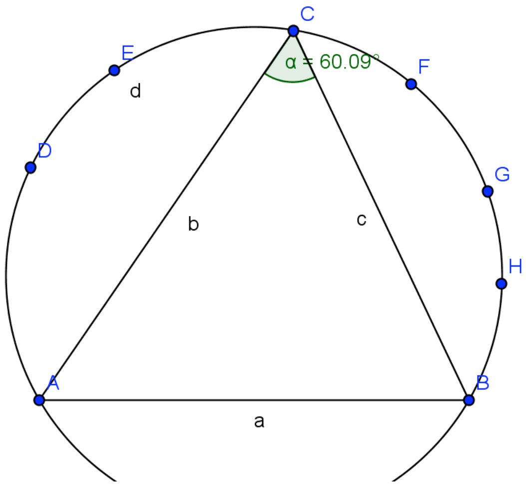
Dreick ABC : Winkelsumme
$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180°$
$2\alpha + 2\beta = 180°$
$\alpha + \beta = 90°$

- $\alpha + \beta = \gamma$.
- γ ist der Winkel von Punkt C.
- Somit ist der Satz des Thales bewiesen.

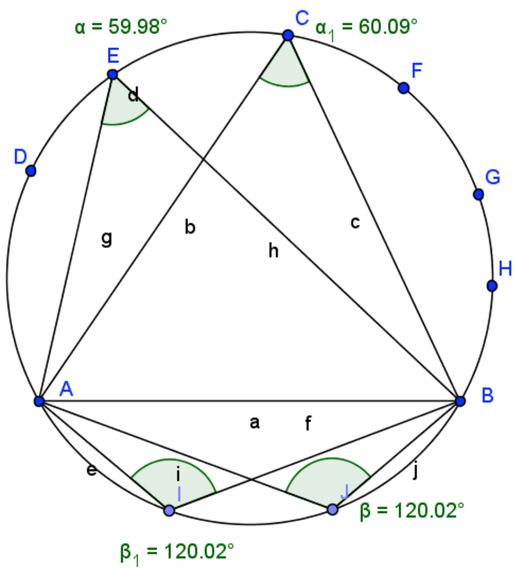
Peripheriewinkel (auch Umfangwinkelsatz)

Was passiert, wenn ich den Winkel an dem Punkt C zum Beispiel auf ca. 60° festlege?

Hierfür bilde ich wieder eine Strecke AB, setze über diese Strecke verschiedene Punkte mit dem Winkel ca. 60° (so genannte Protokollpunkte) und zeichne einen Kreis der durch diese Punkte geht.



Wie man sieht, kann man tatsächlich einen Kreis zeichnen, der durch alle gesetzten Protokollpunkte geht. Dieses klappt mit jedem Winkel.
Die Winkel des Kreises oberhalb der Strecke AB sind unterschiedlich zu den Winkeln unterhalb der Strecke AB. Jedoch sind alle Winkel oberhalb der Strecke AB an dem Kreis gleich groß und alle Winkel unterhalb der Strecke AB an dem Kreis auch gleich groß. Die Strecke AB teilt den Kreis in zwei Teile (Kreisbögen).
Hierzu eine Zeichnung:

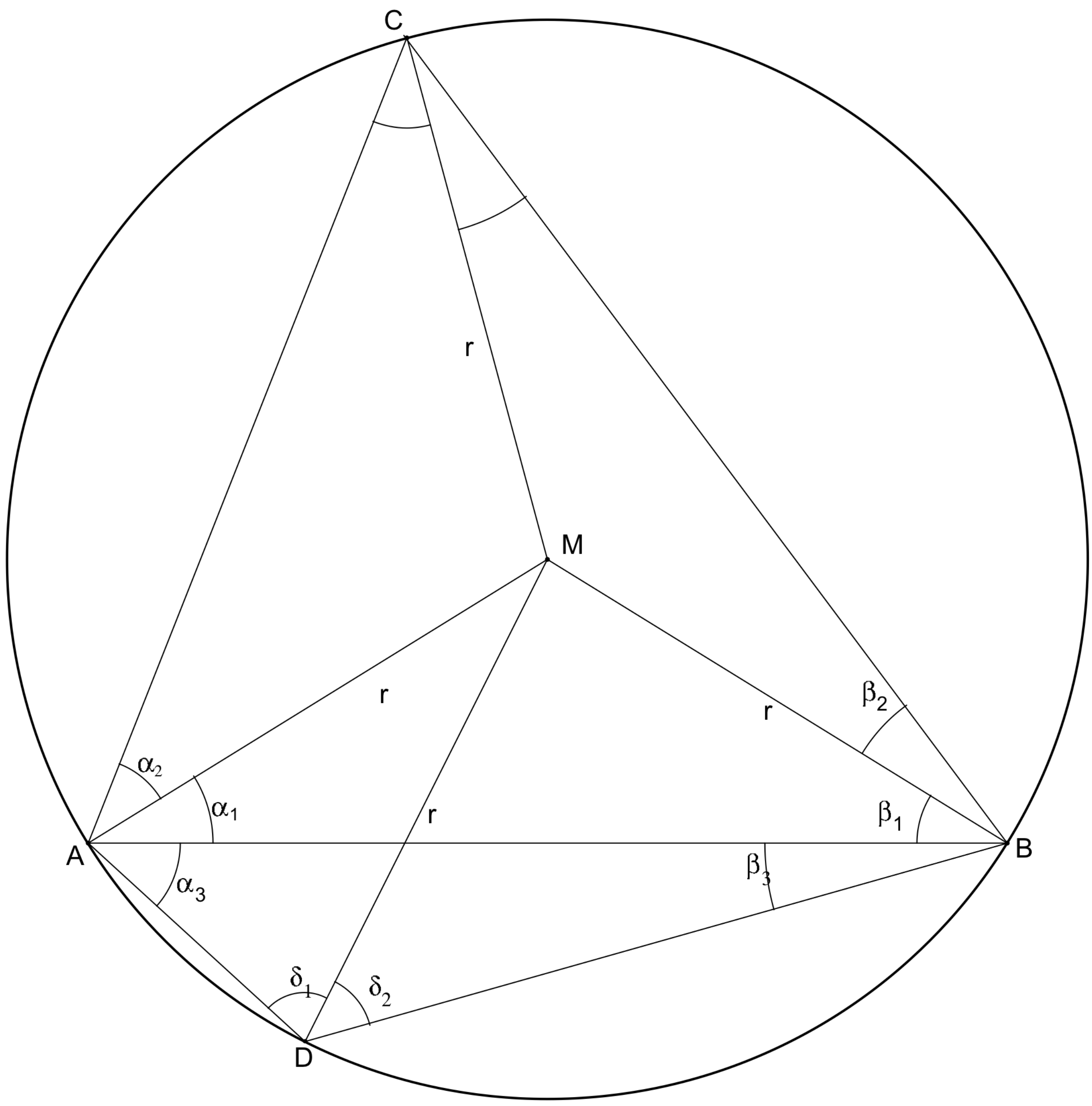


Was fällt auf, wenn man den Winkel oberhalb der Strecke AB und den Winkel unterhalb der Strecke AB vergleicht?

Die beiden Winkel ergeben immer 180°. Siehe Zeichnung oben:

$$\alpha + \beta = 180°$$

Beweis des Peripheriewinkels: (Hierzu eine Zeichnung)



1. Teil des Beweises: Wenn ich den Punkt C auf dem Kreisbogen bewege, bleibt der Winkel immer gleich.

$\alpha_1 = \beta_1$
Wenn M innerhalb des Dreiecks ABC liegt:
$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 = 180°$, also
$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 90°$
Der Winkel ACB hat die Größe $\alpha_2 + \beta_2$ und es gilt
$\alpha_2 + \beta_2 = 90° - \alpha_1$
Der Mittelpunktswinkel AMB hat die Größe $180° - 2\alpha_1$,
was gerade das Doppelte von $\alpha_2 + \beta_2$ ist.

Weshalb bin ich mit diesem Teilbeweis fertig?

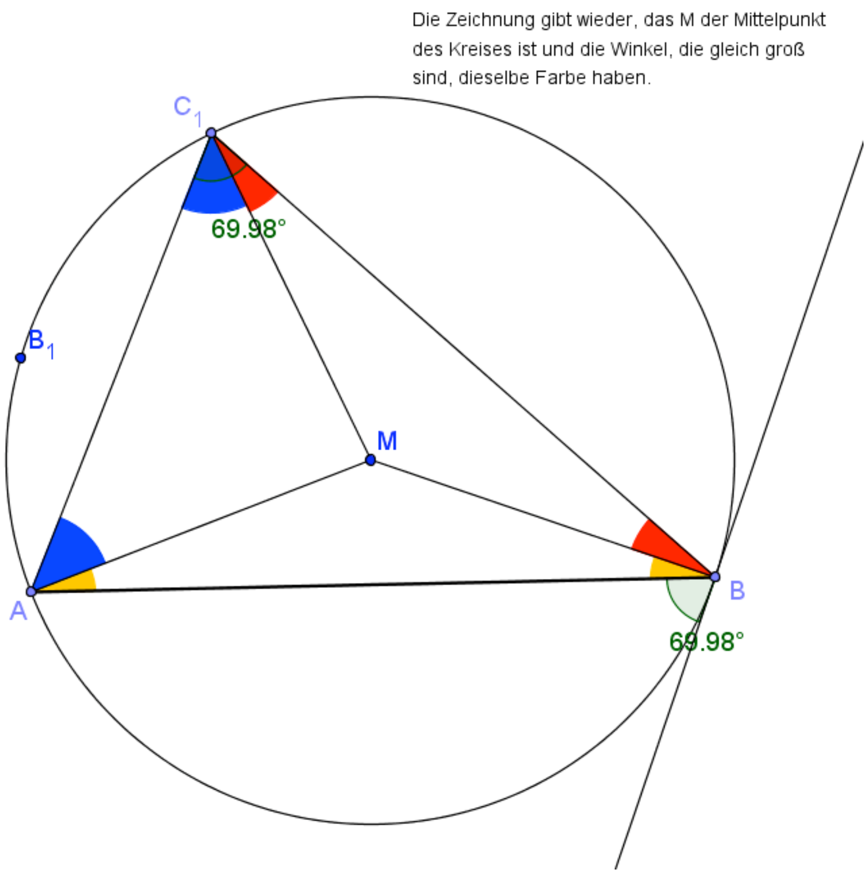
Wenn ich Punkt C auf dem Kreis bewege, ändert sich das Dreieck ABM nicht. Somit ändert sich auch der Winkel beim Mittelpunkt nicht (Winkel AMB). Also bleibt die Hälfte dieses Mittelpunktwinkels auch immer gleich, was bedeutet, dass sich der Winkel beim Punkt C auch nicht ändert, egal wohin man ihn auf dem Kreisbogen bewegt.

2. Teil des Beweises: Die Winkel von Punkt C und Punkt D ergänzen sich immer zu 180°.

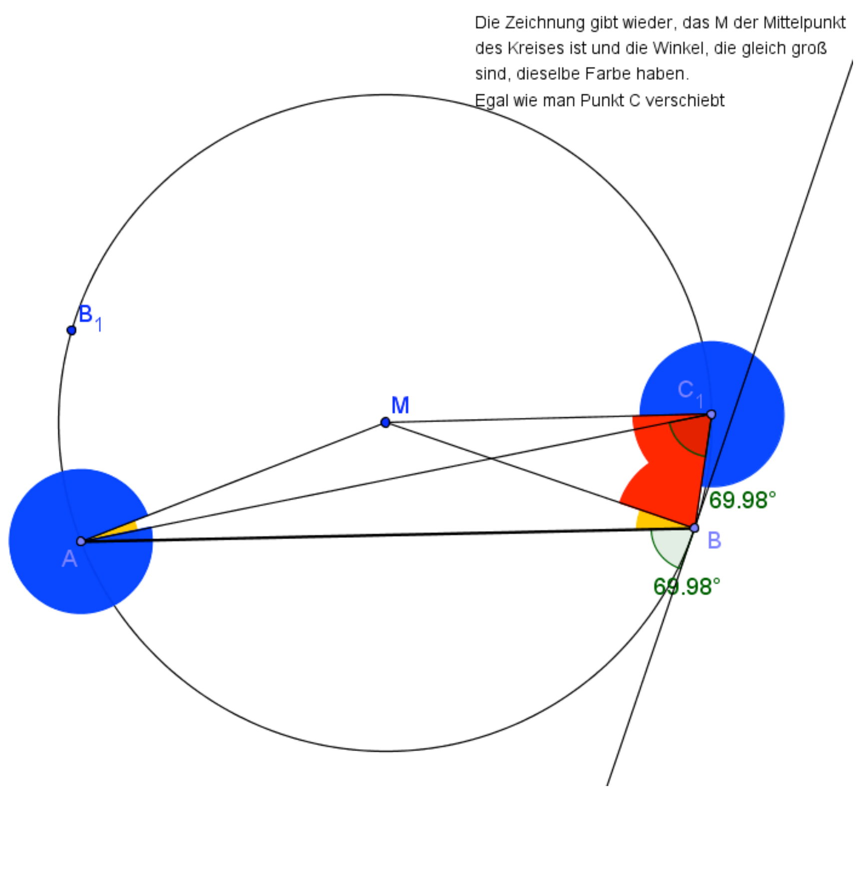
Der Winkel BDA hat die Größe $\delta = \delta_1 + \delta_2$
Der Mittelpunktswinkel AMB hat die Größe
$= 180° - (\alpha_1 + \alpha_3 + \delta_1) + 180° - (\beta_1 + \beta_3 + \delta_2) = 360° - 2\delta_1 - 2\delta_2$
Wie gerade bewiesen ist dieser Mittelpunktswinkel 2γ, wobei γ die Größe des Winkels ACB ist.
$2\gamma = 360° - 2\delta_1 - 2\delta_2 = 360° - 2(\delta_1 + \delta_2)$
$2\gamma + 2\delta = 360°$ oder $\gamma + \delta = 180°$

Ein weiterer Beweis des Peripheriewinkels:

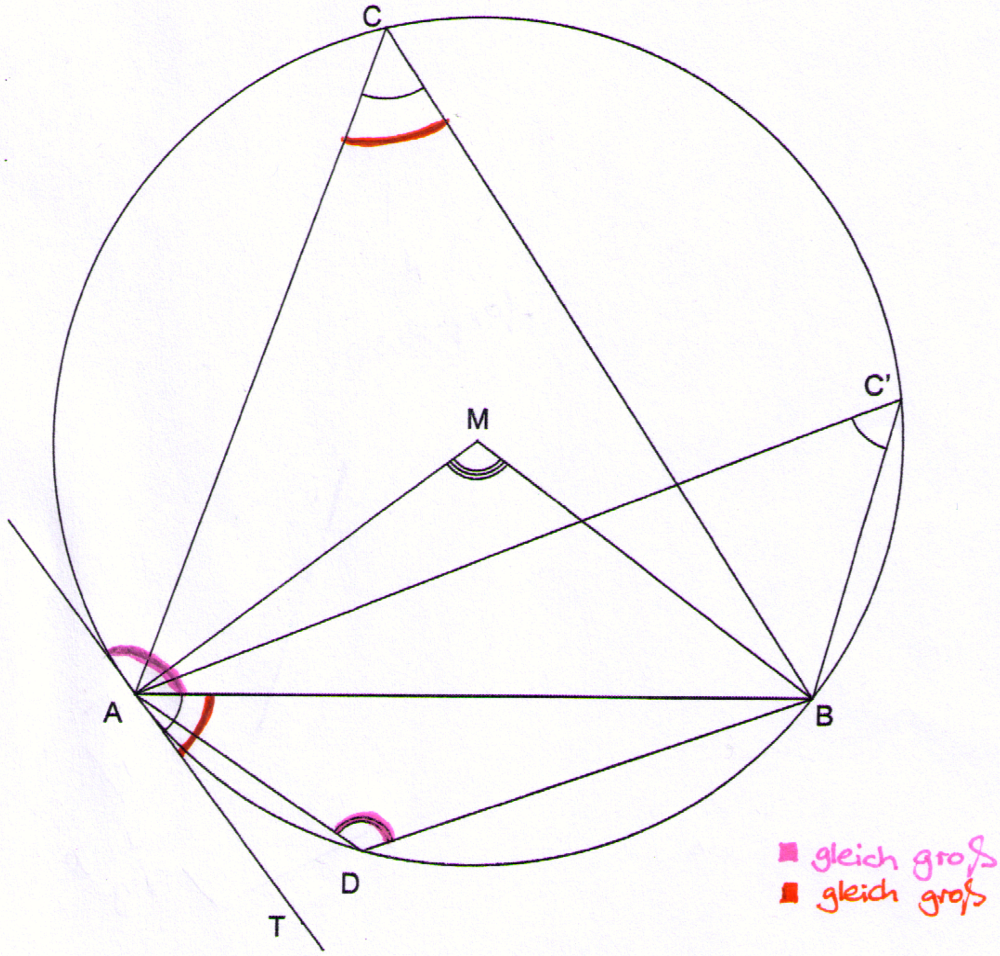
Die folgenden Zeichnungen geben wieder, dass M der Mittelpunkt des Kreises ist und die Winkel, die gleich groß sind, dieselbe Farbe haben. Egal wohin man Punkt C auf dem Kreis setzt.



Zieht man den Punkt C so weit zur Seite, dass M nicht mehr innerhalb der Fläche des Dreiecks ABC liegt, so sind (hier) die blauen nicht mehr korrekt markiert. Das zeigt, dass der oben aufgeschriebene Beweis nur gültig ist, wenn M innerhalb der Fläche des Dreiecks ABC liegt. Für den nebenstehenden Fall muss man den Beweis leicht verändert noch einmal aufschreiben.



Der Peripheriewinkelsatz (auch Umfangswinkelsatz)



Bewegt sich C auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$ (oberhalb der Sehne), so ist der Winkel $\sphericalangle ACB$ stets gleich groß.	$\lvert\sphericalangle ACB\rvert = \lvert\sphericalangle AC'B\rvert$
Zu einer Sehne ist der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel.	$\lvert\sphericalangle AMB\rvert = 2 \cdot \lvert\sphericalangle ACB\rvert$
Die beiden Peripheriewinkel auf den verschiedenen Kreisbögen zur Sehne ergänzen sich zu 180°.	$\lvert\sphericalangle ACB\rvert + \lvert\sphericalangle BDA\rvert = 180°$
Der Sehnen-Tangenten-Winkel ist so groß wie der Peripheriewinkel.	$\lvert\sphericalangle TAB\rvert = \lvert\sphericalangle ACB\rvert$
Umkehrung Sind die beiden Winkel bei C und C' gleich groß und liegen sie über derselben Strecke $\overline{AB}$, so liegen die vier Punkte A, B, C und C' auf einem Kreis.	$\lvert\sphericalangle ACB\rvert = \lvert\sphericalangle AC'B\rvert$ $\Rightarrow \exists K, K$ Kreis, mit $A,B,C,C' \in K$

Figur zum Satzgefüge des Peripheriewinkels:

Auf der folgenden Zeichnung kann man erkennen, welche Winkel gleich sind, also denselben Wert haben.
Diese Zeichnung, in der ohne Worte das ganze Satzgefüge erfasst wird, ist von Heinrich Winter.