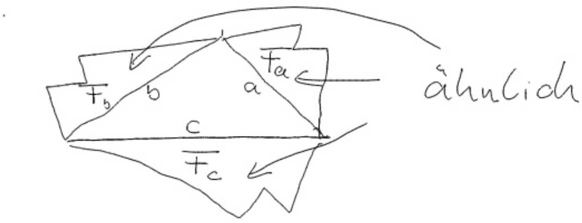
Universität Bremen
Fachbereich 3
Mathematik / Informatik
Seminar: Geometrie (für Staatsexamen)
im SoSe 2009
Dozenten: Heinz-Otto Peitgen, Reimund Albers

Protokoll zum 23. April 2009

Übungen zu Kongruenzsätze, Strahlensätze, Pythagoras

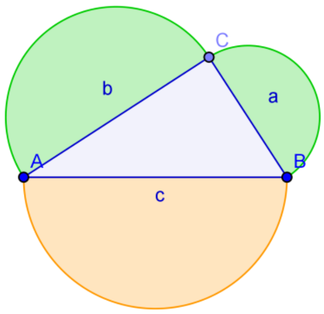
1. Die Möndchen des Appolonius

Der Satz des Pythagoras kann auf andere zueinander ähnliche ebene Figuren erweitert werden.



Die Summe der Flächen zwei ähnlicher Figuren über den Katheten, ist gleich der Fläche an der Hypotenuse.

$$F_a + F_b = F_c$$

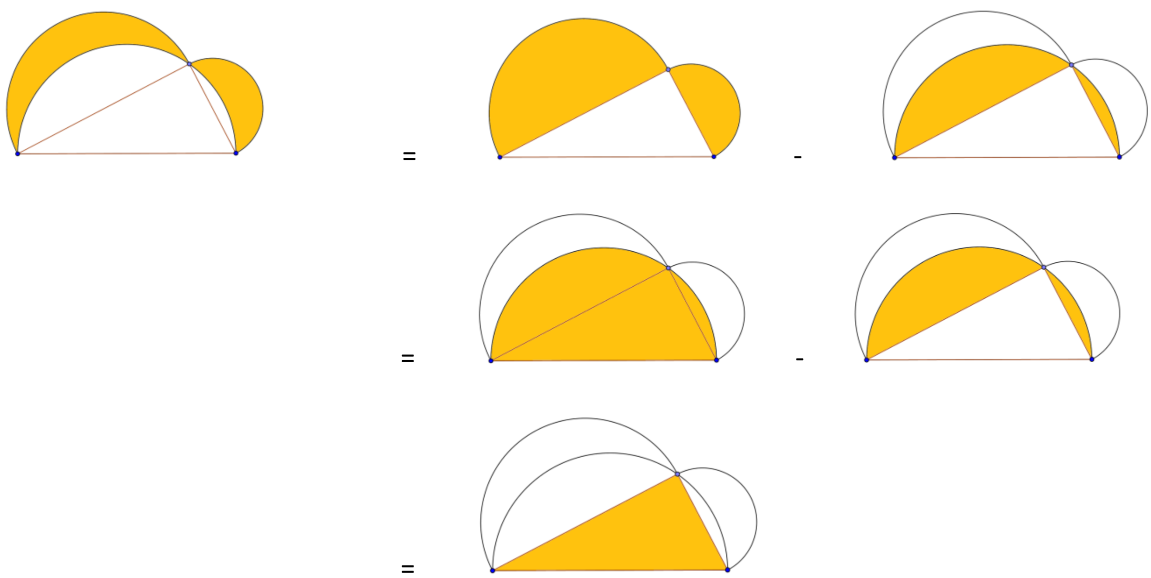


Satz des Pythagoras:

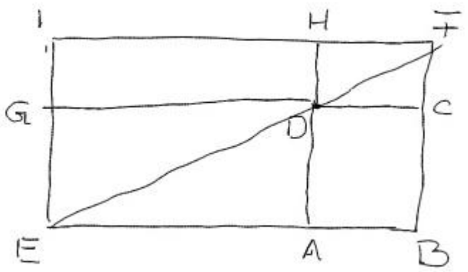
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Big| * \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} * a^2\right) + \left(\frac{\pi}{2} * b^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} * c^2\right)$$

Anschaulicher Beweis:

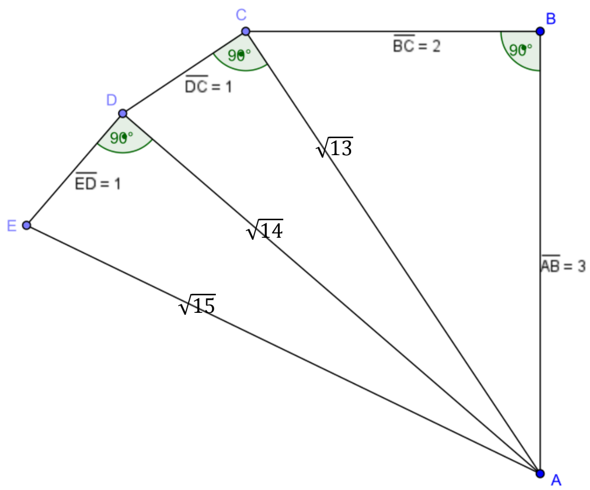


2. *Flächenumwandlung*



$$|\triangle EBF| = |\triangle EFI|$$
$$|\triangle DCF| = |\triangle DFH| \quad -$$
$$|\triangle EAD| = |\triangle EDG| \quad -$$
$$\overline{|\square ABCD| = |\square GDHI|}$$

3. *Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt{15}$ cm*



$$15 = 9 + 4 + 1 + 1$$
$$= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$

Summe der Quadratzahlen. Jede natürliche Zahl lässt sich in min. vier Quadratzahlen teilen.

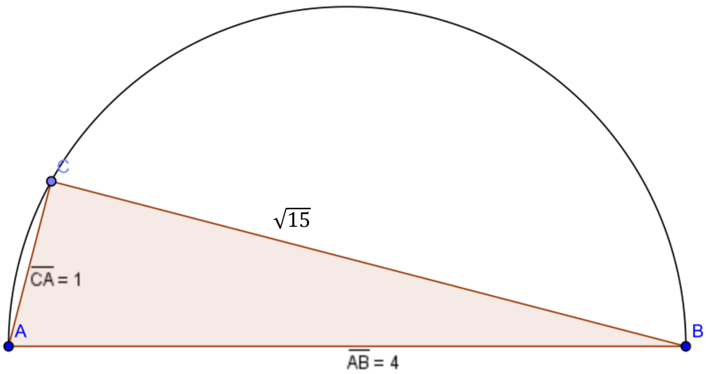
$$23 = 16 + 4 + 1 + 1 + 1$$

Gieriger Algorithmus: Es wird mit der größten Quadratzahl angefangen, welches in der 23 vorhanden ist. So kommt die 23 nicht aus vier sondern aus fünf Quadratzahlen zustande.

Es geht auch geschickter!

$$23 = 9 + 9 + 4 + 1$$

a) mit dem Satz des Pythagoras

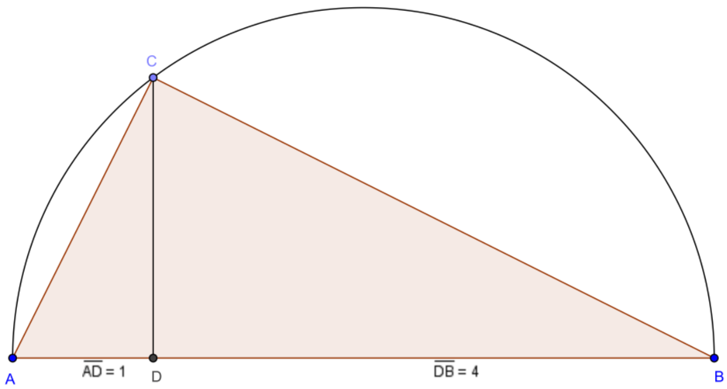


Die Differenz der Quadratzahlen wird gebildet.

$15 = 16 - 1$

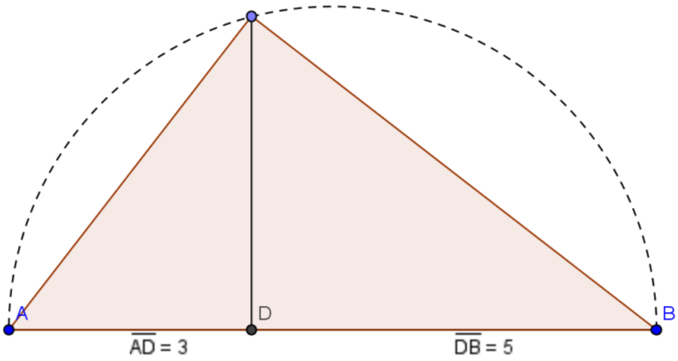
(Strecke $\overline{AB}$ und der Thaleskreis wird gezeichnet. 1cm wird mit dem Zirkel abgemessen und von A aus auf dem Halbkreis markiert. $\overline{AC}$ wir gezeichnet und Punkt C mit B verbunden. Strecke $\overline{CB}$ ist $\sqrt{15}$ cm lang.)

b) mit dem Kathetensatz



1. Zeichne $c = 15$
2. " Thaleskreis
3 " $|AD| = 1 = q$ auf $\overline{AB}$
4. " in D das Lot zu AB --> C
5. Wg Kathetensatz: $|AC| = \sqrt{15}$

c) mit dem Höhensatz



$h^2 = p \cdot q$

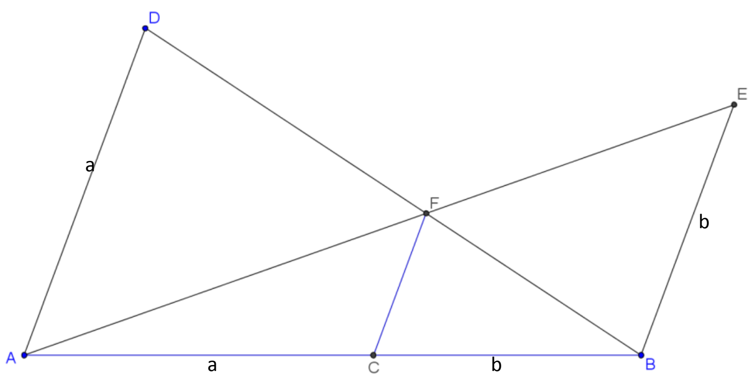
$3 \cdot 5$

$|DC| = h = \sqrt{15}$

($\overline{AB}$ wird gezeichnet. p=3 und q=5. Der Thaleskreis und das Lot durch D wird gezeichnet.)

4.

a) Beweis: CF || AD



$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{a}{b}$ (2. Str S, F)

also

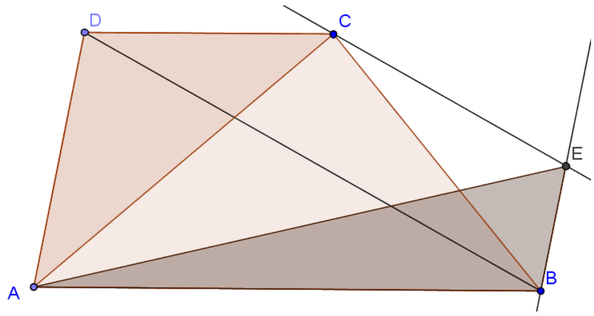
$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{a}{b} \Rightarrow FC \parallel BE$

b) $|CF| = ?$

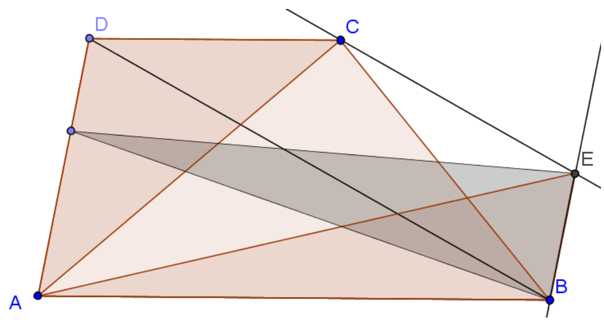
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|BE|} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{|CF|}{b}$$

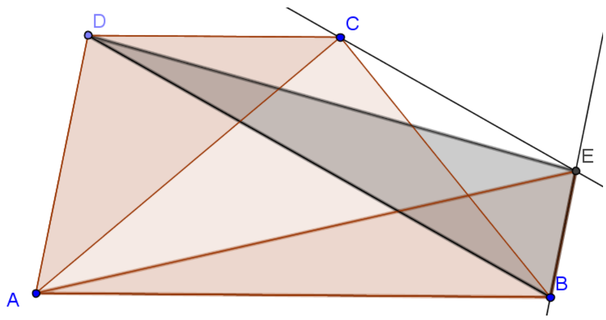
$$\frac{a \cdot b}{a+b} = |CF|$$

6. 46. Mathematik-Olympiade, 3. Runde, Klasse 7

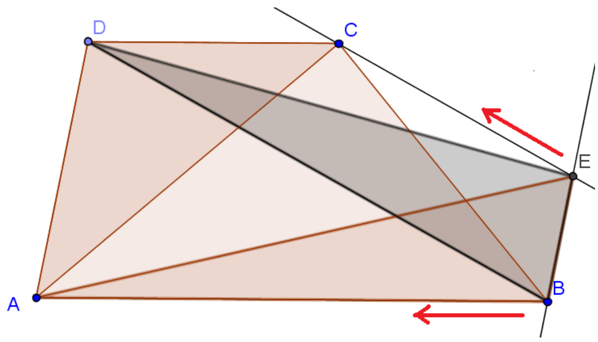


Das Dreieck ABE wird über die Parallele AD geschert. Der Flächeninhalt des Dreiecks ändert sich nicht, da sich die Höhe des Dreiecks nicht ändert.





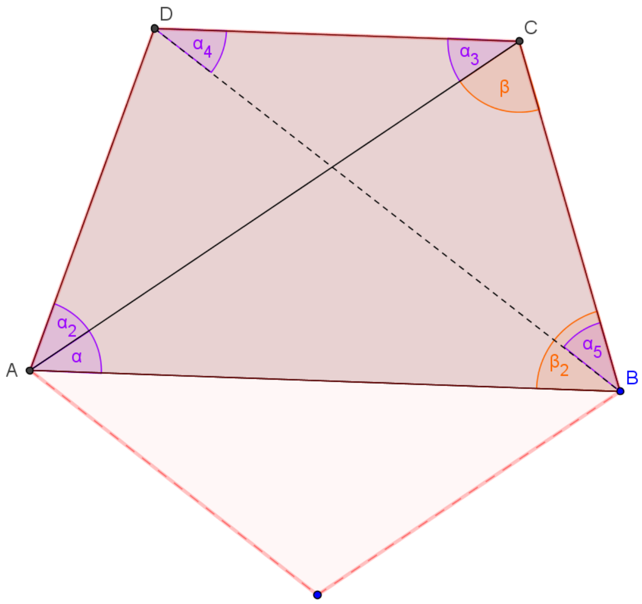
So bekommt man das Dreieck DBE, wessen Fläche dieselbe Größe hat.



Auf dieselbe Art wird E und B geschert.

Am Ende hat man ein Dreieck der Flächengröße ABE auf das Dreieck ADC, über die Parallele geschert und somit bewiesen, dass die Flächen der Dreiecke ACD und ABE gleich groß ist

7. 47. Mathematik-Olympiade, 3. Runde, Klasse 7



$$|AD| = |DC| = |CB|$$

$$|AC| = |AB|$$

$$\alpha + 2\beta = 180°$$
$$\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5 + \beta = 180°$$
$$3\alpha + \beta = 180°$$

$$\alpha + 2\beta = 180°$$
$$3\alpha + \beta = 180° \quad | \cdot 2$$

$$\alpha + 2\beta = 180°$$
$$6\alpha + 2\beta = 360°$$

$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$
$$2\alpha = 72°$$
$$\alpha + \beta = 108°$$