Protokoll Geometrie vom 22.05.2008

Stephan Peikert

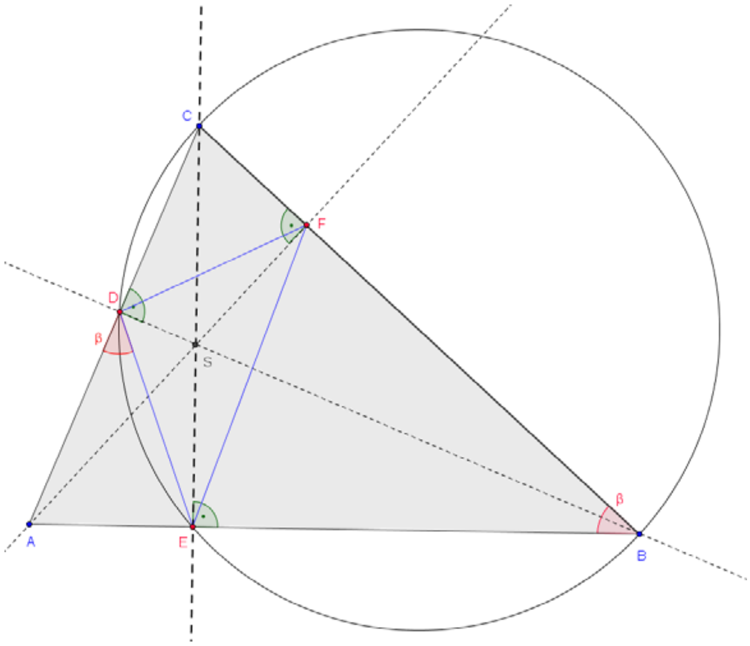
Fortsetzung der letzten Sitzung:

<u>Aussage:</u>

„Die Höhen eines Dreiecks ABC sind die Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks DEF.“

Beweis:

Wir zeichnen den Thaleskreis über die Strecke $\overline{BC}$. Die Punkte D und E liegen dann auf diesem Kreis.



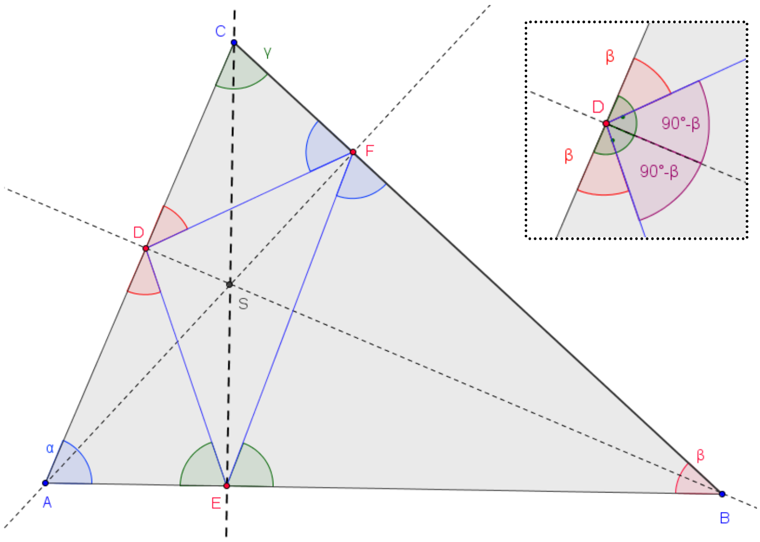
Nun betrachten wir die Sehne $\overline{CE}$:

$\measuredangle CBA =: \beta$ ist der Umfangswinkel auf der einen Seite,
$\measuredangle EDC$ auf der anderen Seite.

Nun gilt:

$|\measuredangle EDC| = 180° - |\measuredangle CBA| = 180° - \beta.$

Also ist der Nebenwinkel zu $\measuredangle EDC$ der Winkel $\measuredangle ADE$ so groß wie β



Analog erhält man weitere Winkel und folgende Übereinstimmungen:

$$\beta = |\measuredangle ADE| = |\measuredangle FDC|$$

$$\gamma = |\measuredangle DEA| = |\measuredangle BEF|$$

$$\alpha = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle EFB|$$

Aufgrund der Orthogonalität der Höhen erhalten wir für die Innenwinkel:

$|\measuredangle EDB| = |\measuredangle BDF| = 90° - \beta$

Andere analog

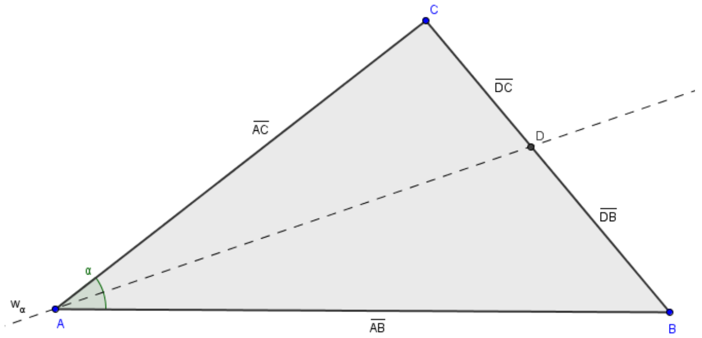
□

Folgerung:

Die Teildreiecke AED,FEB und FCD sind ähnlich

Satz:

Im Dreieck teilt eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten

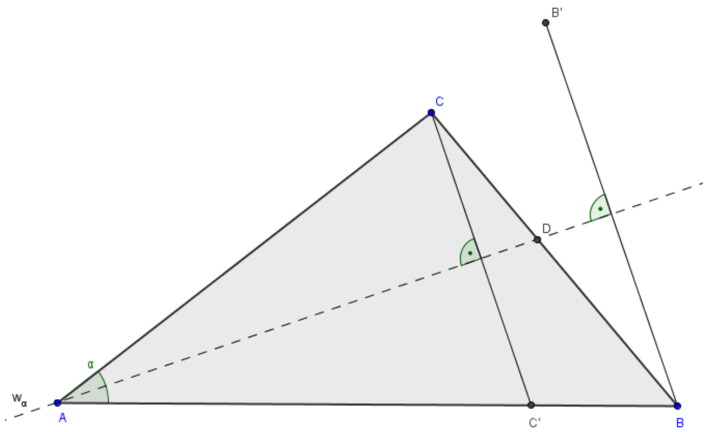


d.h.:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|}$$

Beweis:

Sei oBdA w_α die Winkelhalbierende des Winkels α



Wir spiegeln Punkt B und Punkt C jeweils an der Winkelhalbierendenw_α. Die Strecken $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ sind senkrecht zu w_α, sie sind also parallel zueinander.

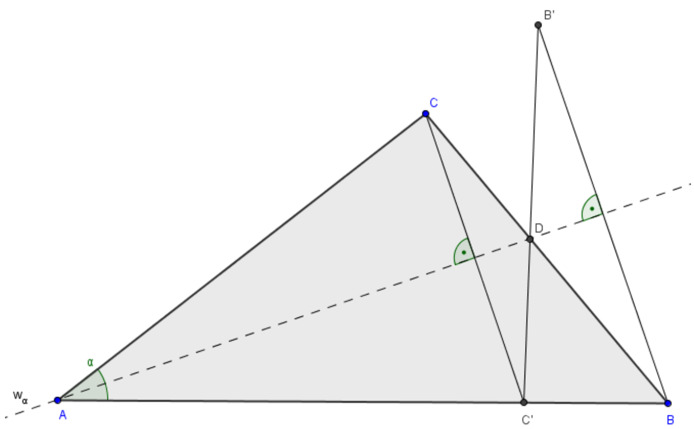
1. Schritt:

Der zweite Strahlensatz mit Zentrum A liefert:

$$\frac{|AC'|}{|AB|} = \frac{|CC'|}{|BB'|}$$

2. Schritt:

Der zweite Strahlensatz mit Zentrum D (D ist der Schnittpunkt der Strecke $\overline{BC}$ mit w_α) liefert:



$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CC'|}{|BB'|}$$

Nun folgt:

$$\frac{|AC'|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|}$$

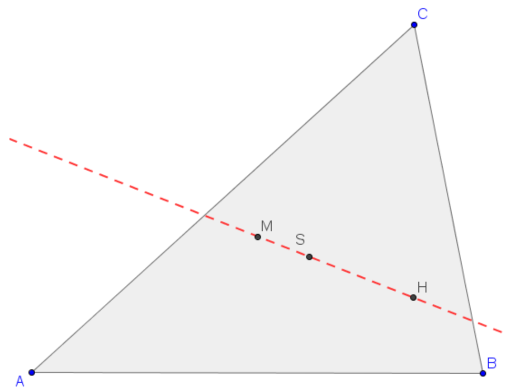
Da $\overline{AC'} = \overline{AC}$ erhalten wir:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|}$$

□

Satz (Eulergerade):

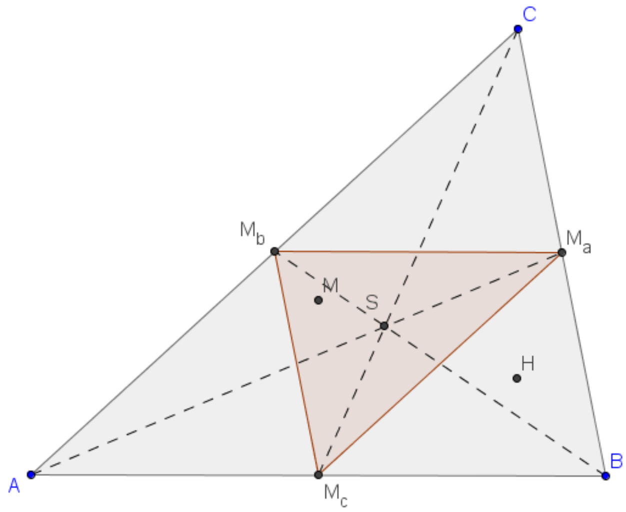
Der Umkreismittelpunkt M, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks liegen auf einer Gerade,
der Eulergeraden des Dreiecks.



Zusätzlich gilt:
$$\frac{|\boldsymbol{MS}|}{|\boldsymbol{SH}|} = \mathbf{1:2}$$

Beweis:

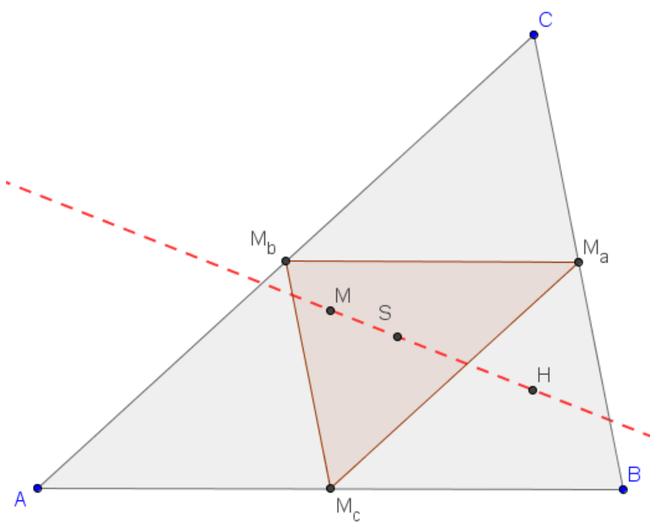
Wir bilden die drei Seitenhalbierenden und erhalten ihren Schnittpunkt S (Schwerpunkt).



Wir bilden über die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c das Mittendreieck. Dieses hat zu den Seiten des Ausgangsdreiecks parallele Seiten halber Länge
Das Mittendreick geht also aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung um den Faktor $k = -\frac{1}{2}$ mit dem Streckzentrum S hervor:

$$A \to M_a$$
$$B \to M_b$$
$$C \to M_c$$

Den Schwerpunkt S haben beide Dreiecke gemeinsam, da sie die gleichen Seitenhalbierenden haben.
Der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC wird auf H‘ abgebildet: $H \to H'$



Wir wissen nun aber bereits, dass der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks, dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Ausgangsdreiecks entspricht und somit gilt:
$H \to M$

Damit müssen die Punkte S, H und M auf einer Geraden liegen und es gilt darüber hinaus das Verhältnis
$$\frac{|MS|}{|SH|} = 1:2$$

□

Abschließend bleibt noch eine Frage:

Wann liegt auch der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden von ABC auf der Eulergeraden und damit alle vier Dreieckszentren?

Der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden liegt genau dann auf der Eulergeraden, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Das folgt einfach aus der Tatsache, dass die Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \measuredangle ACB$ gleichzeitig Höhe und Mittelsenkrechte auf der Strecke $\overline{AB}$ ist.