Geometrie

Protokoll vom 15.05.2008

von Michael Rosenkranz
und Vanessa Pasdzior

1. Wiederholung vom 08.05.2008

Warum vertauscht der Spiegel Links und Rechts und nicht Oben und Unten?

Der Spiegel vertauscht nicht Links und Rechts. Er spiegelt nur die Seiten.
Als Beispiel wird ein Briefumschlag mit einer Adresse gezeigt. Um die Adresse lesen zu können, muss der Brief vom Zeigenden gedreht werden. Der Spiegel macht diese Rotation nicht.

2. Dreieckszentren

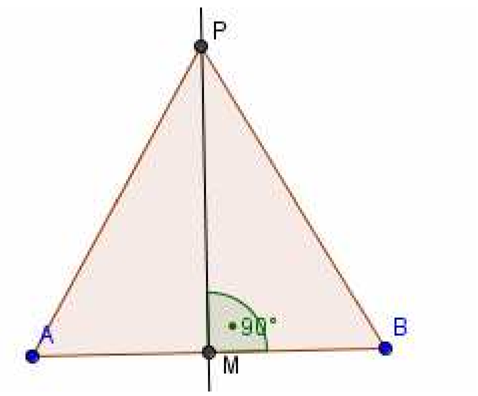
Kimberling-Liste (Kann im Internet nachgeschaut werden)

Zentren 1 bis 4 sind die Zentren, die in der Schule behandelt werden.

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden – Mittelpunkt des Inkreises
Schnittpunkt der Seitenhalbierenden – Schwerpunkt
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten – Mittelpunkt des Umkreises
Schnittpunkt der Höhen – ---

Satz:
Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieses ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Beweis:
Hilfssatz: P ist Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB} \Leftrightarrow |PA| = |PB|$
Beweis des Hilfssatzes:
„$\Rightarrow$" über $\Delta AMP \cong \Delta MBP$ SWS
„$\Leftarrow$" P mit M verbinden
Zu zeigen ist: $|\angle PMA| = 90°$
$\Delta AMP \cong \Delta MBP$ SSS
$\Rightarrow |\angle PMA| = |\angle BMP|$
$|\angle PMA| + |\angle BMP| = 180°$, da Nebenwinkel
$\Rightarrow |\angle PMA| = |\angle BMP| = 90°$ q.e.d.



M ist Schnittpunkt von m_{AB} mit m_{BC}

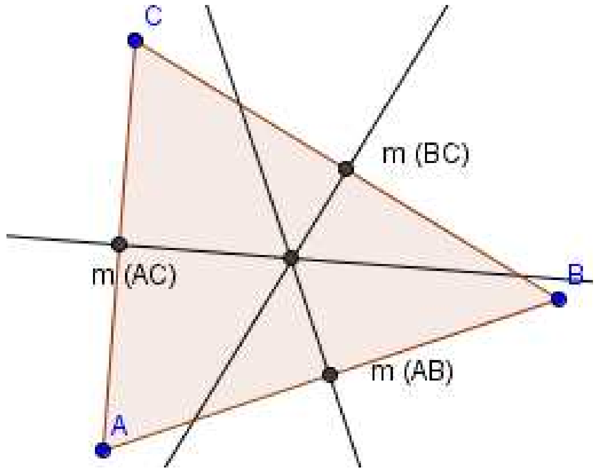
$$\left.\begin{array}{l} M \in m_{AB} \Rightarrow |MA| = |MB| \\ M \in m_{BC} \Rightarrow |MB| = |MC| \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow |MA| = |MC| \Rightarrow M \in m_{AC}$

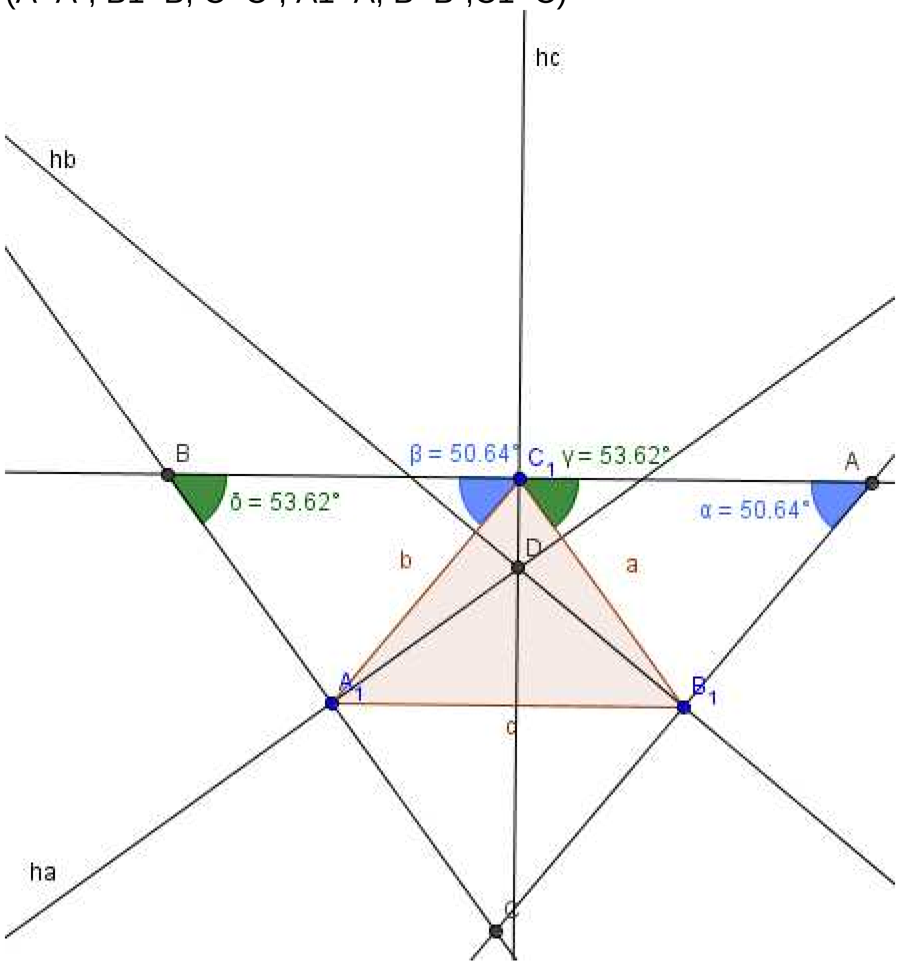
(mit der Umkehrung des Hilfssatzes)

Insbesondere gilt: $|MA| = |MB| = |MC|$

Also gibt es einen Kreis mit Mittelpunkt M, der durch A, B und C verläuft.



Satz:
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
(A=A´, B1=B, C=C´, A1=A, B=B´,C1=C)



Beweis:
Zeichne durch jeden Eckpunkt die Parallele zur gegenüberliegenden Seite
$\rightarrow \Delta A'B'C'$

Vergleich $\Delta ACB'$ mit $\Delta BA'C$

$|\angle B'CA| = |\angle CA'B|$ Stufenwinkel

$|\angle AB'C| = |\angle BCA'|$ Stufenwinkel

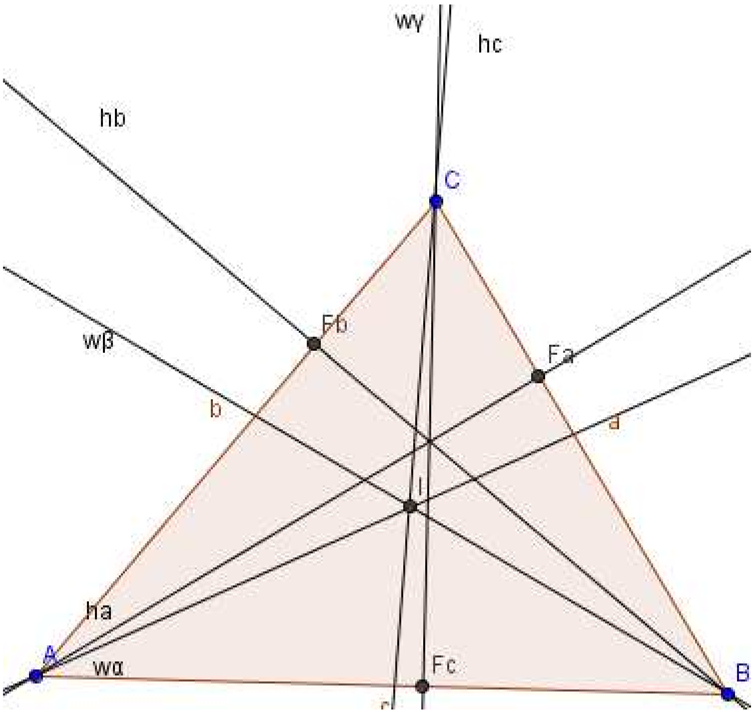
$|AC| = |BA'|$ da $\diamond\, ABA'C$ Parallelogramm

$\Rightarrow \Delta ACB' \cong \Delta BA'C$ nach WSW

$\Rightarrow |B'C| = |CA'|$ d.h. C ist Mitte von $\overline{B'A'}$

Analog schließen für A und B.
Die Höhen des ΔABC sind damit die Mittelsenkrechten des $\Delta A'B'C'$.

Satz:
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser hat von den drei Seiten den gleichen Abstand (gemeint ist der kürzeste Abstand).



Beweis:
Hilfssatz: $P \in w \Leftrightarrow |PF_1| = |PF_2|$
Beweis über kongruente Dreiecke WSW

I ist Schnittpunkt von w_α und w_β

$$\left.\begin{array}{l} I \in w_\alpha \Rightarrow |IF_c| = |IF_B| \\ I \in w_\beta \Rightarrow |IF_c| = |IF_a| \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow |IF_b| = |IF_a| \Rightarrow I \in w_\chi$

Insbesondere gilt $|IF_a| = |IF_b| = |IF_c|$.

Also gibt es einen Kreis mit dem Mittelpunkt I, der die drei Seite in den drei Fußpunkten F_a, F_b, F_c berührt.