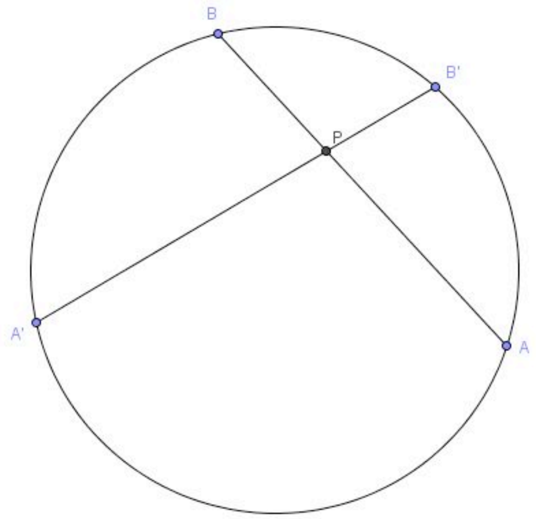
Veranstaltung: Geometrie
Leiter: Dr. R. Albers
Protokollantin: Danijela Sabljic

Protokoll vom 28.04.08

In der dargestellten Vorlesung werden der Sehnensatz, der Sekantensatz und der Fermatpunkt besprochen.

Sehnensatz:

Schneiden zwei Sehnen einander in einem Punkt *S*, so ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte gleich.



Es gilt demnach:

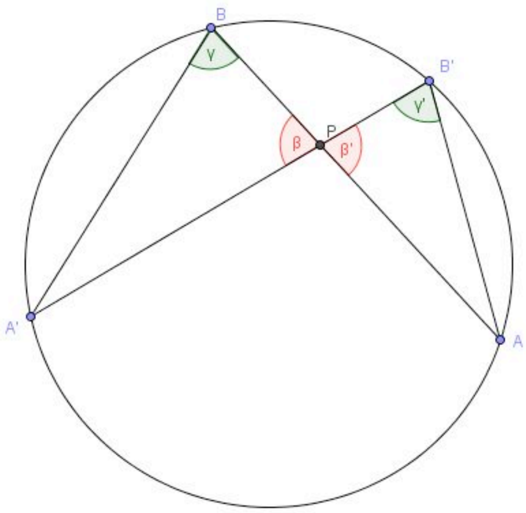
$$|AP| \cdot |PB| = |A'P| \cdot |PB'|$$

Beweis:

Der Sehnensatz lässt sich mit Hilfe der Ähnlichkeit der Dreiecke *∆ A'BP* und *∆ AB'P* beweisen:

Hilfssatz:

Ähnlichkeitssätze am Dreieck:
Folgende Aussagen sind äquivalent:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
a) in zwei Winkeln übereinstimmen,
b) im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen,



Mit Hilfe der Zeichnung kann gezeigt werden, dass die Dreiecke ∆ A'BP und ∆ AB'P ähnlich zueinander sind, denn

1. Die Scheitelwinkel in P sind gleich groß : ß = ß'

2. Nach Umfangswinkelsatz gilt: □ = □', da

□ A'BA = □ A'B'A (Mit Sehne IA'AI)

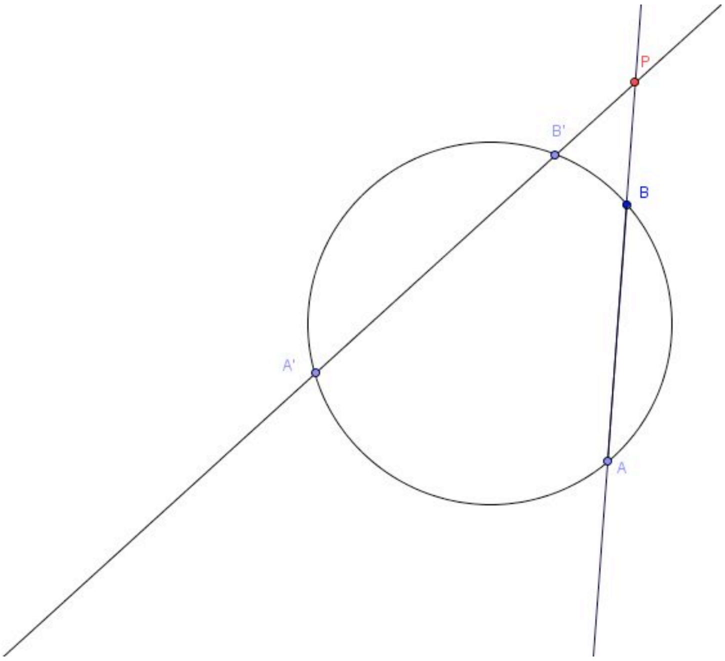
Somit ist gezeigt, dass die Dreiecke nach a) ähnlich sind und es existiert das folgende Verhältnis ihrer Seiten:

$$\frac{IBPI}{IPA'I} = \frac{IPB'I}{IPAI}$$

□ $IBPI \cdot IPAI = IPB'I \cdot IPA'I$

Der Sekantensatz:

Schneiden zwei Sekanten einander außerhalb des Kreises in einem Punkt *P*, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sekantenschnittpunkt bis zu den beiden Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich groß

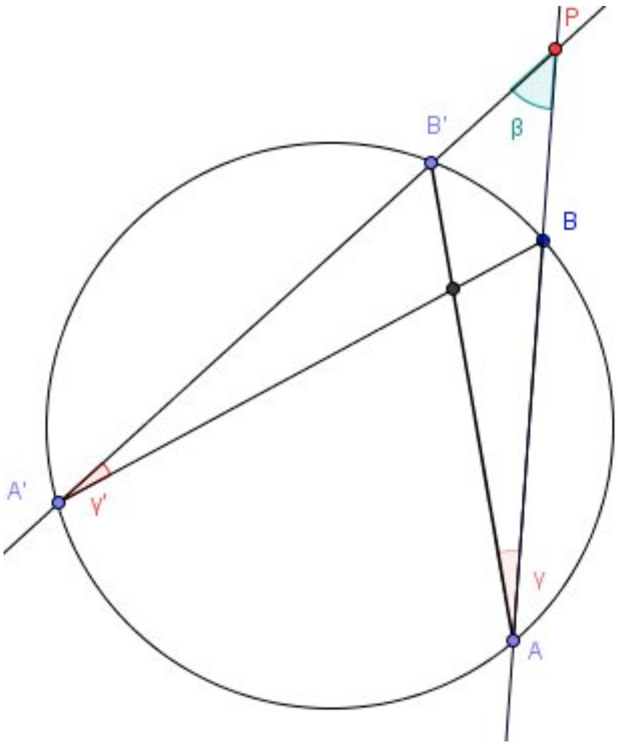


Es gilt demnach:

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$$

Beweis:

Der Satz kann ebenfalls mit Hilfe von Ähnlichkeitsbedingungen von Dreiecken bewiesen werden:



Die Dreiecke ∆ APB’ und ∆ A’BP sind ähnlich zueinander, da

1. sie einen gemeinsamen Winkel ß im Punkt P besitzen
2. die Winkel □ und □’ gleich groß sind. (Begründung: Die Umfangswinkel der Sehne IBB’I sind gleich groß)

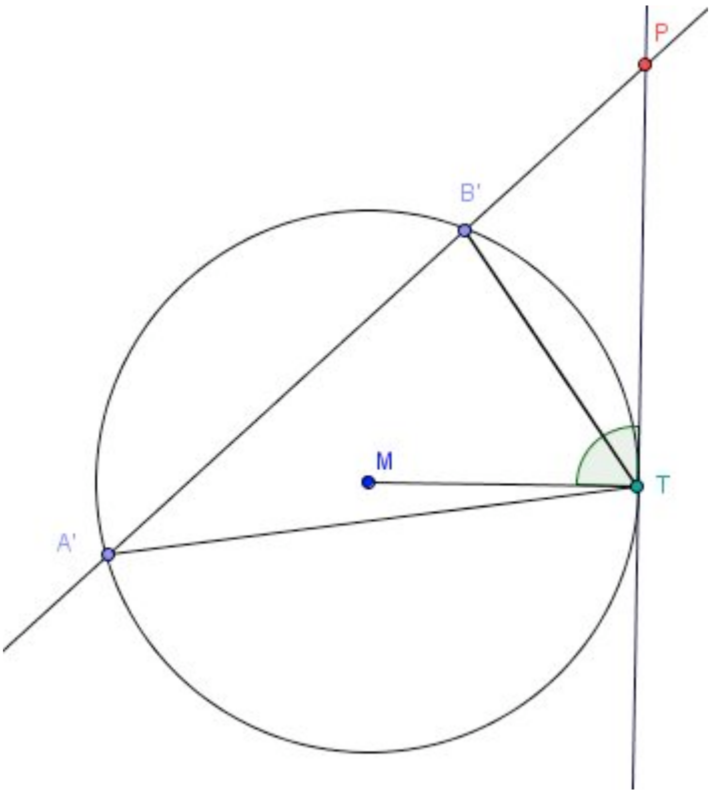
Somit existiert das folgende Verhältnis ihrer Seiten:

$$\frac{IBPI}{IPA'I} = \frac{IPB'I}{IPAI}$$

□ $IBPI \cdot IPAI = IPB'I \cdot IPA'I$

Potenz eines Punktes P in Bezug auf den Kreis:

Die Potenz eines Punktes P in Bezug auf den Kreis kann als Maß verstanden werden und sagt aus, wie weit außerhalb oder innerhalb eines Kreises sich ein Punkt P befindet:



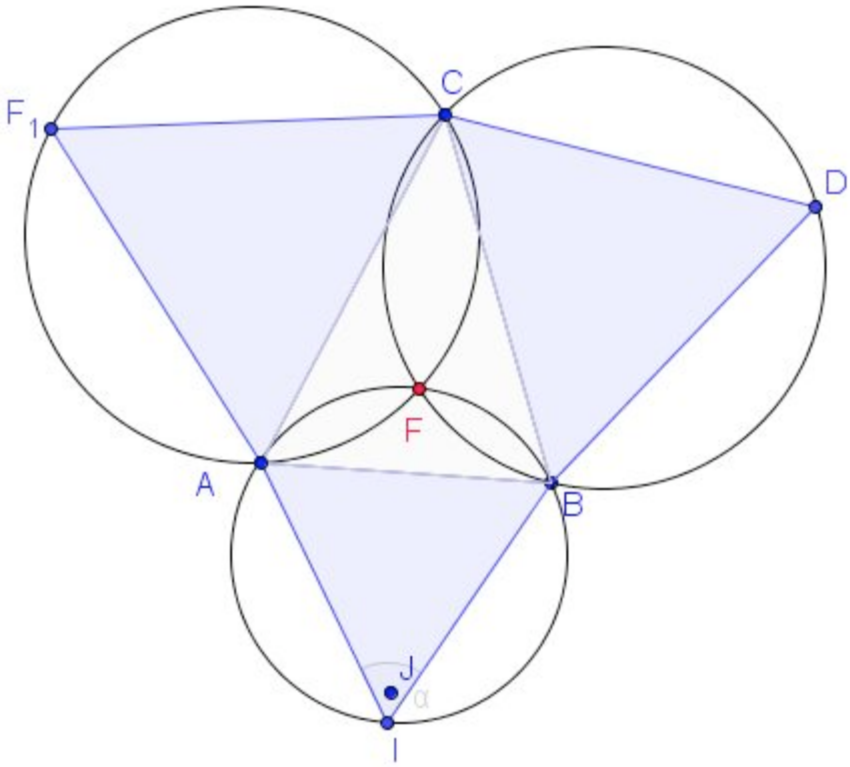
Rechnung:

$$
\begin{aligned}
|PA| \cdot |PB| &= |PA'| \cdot |PB'| && \text{(nach Sekantensatz A=B=T)} \\
&= |PT|^2 \\
&= |PM|^2 - |MT|^2 && \text{(nach Pythagoras)} \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

□ $|PT|^2 = |PM|^2 - |MT|^2$

Der Fermat –Punkt:

Konstruktion:
1. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks werden nach außen drei regelmäßige Dreiecke gezeichnet.
2. Um die Eckpunkte der drei entstandenen Dreiecke wird nun jeweils ein Umkreis gezogen

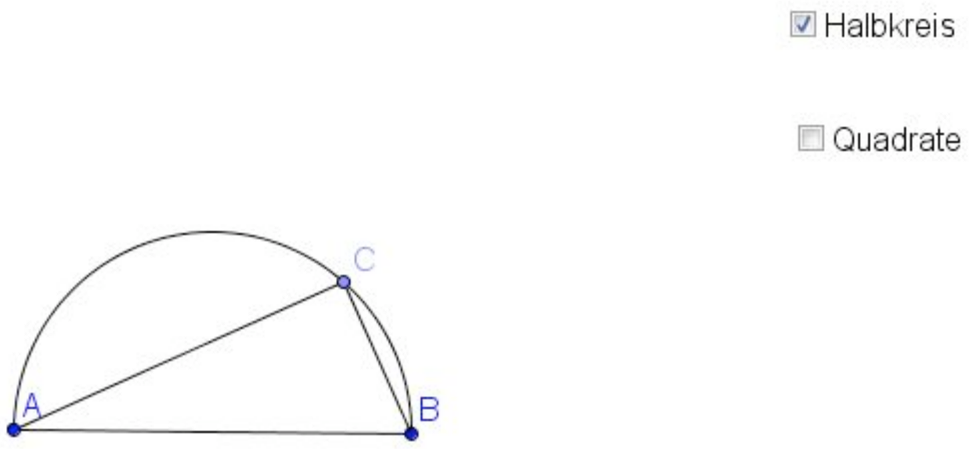


Die drei Kreise schneiden sich genau in einem Punkt, der Fermat–Punkt genannt wird.

Beweis:

1. α hat die Größe von 60°, damit hat der gegenüberliegende Winkel AFB nach dem Peripheriesatz 120°
2. Ebenso kann man von □ CDB = 60 auf □ BFC = 120 schließen, sodass F auch auf dem 2. Umkreis liegt
3. Demnach muss der dritte Winkel ebenfalls 120 betragen, somit liegt F ebenfalls auf dem 3. Umkreis liegt

Technik Tipp Geogebra



Auf der Homepage zur Lehrveranstaltung ist die zu sehende Datei zu finden.
Ich möchte kurz erläutern, wie Kontrollkästen entstehen.

1. Gehe auf das vorletzte Symbol und gehe auf Kontrollkästchen, um Objekte anzuzeigen/ auszublenden
2. In das Feld Beschriftung gebe dein gewünschten Text ein
3. Wähle nun mittels der Liste oder deiner Konstruktion die gewünschten Objekte an