

Protokoll Geometrie 21.04.2008

Thema: Beweis zum Satz des Pythagoras

DGS: Dynamische Geometrie Software

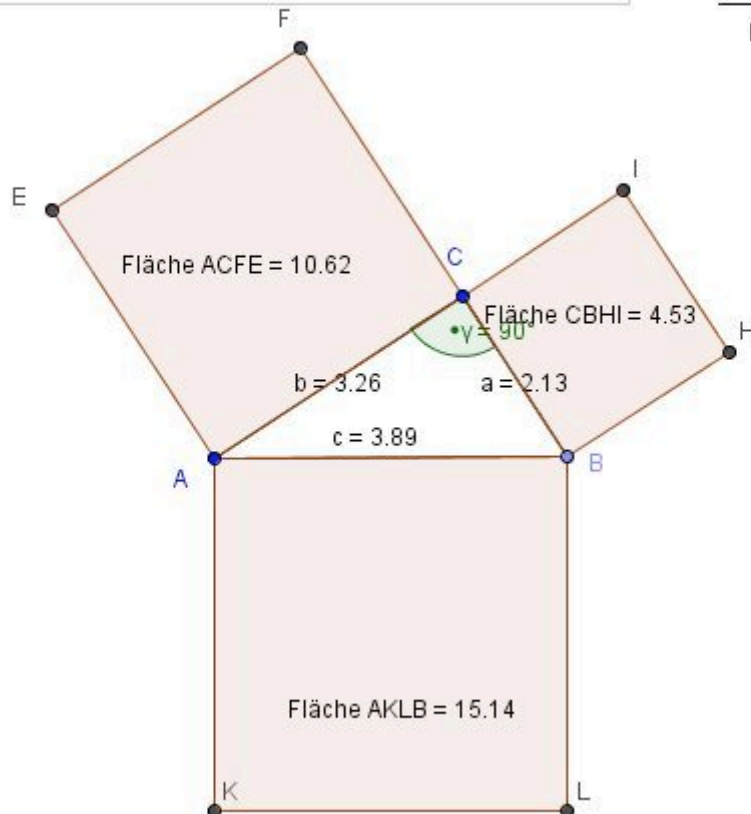
Datei „Pyth_rechn1.ggb“

Aufgabe:

Bewege die Figur und vergleiche dabei die Rechnung rechts.
Was stellst du fest? Mache ein allgemeingültige Aussage.

Rechne nach:

$$\begin{array}{r} \text{Fläche ACFE} = 10.62 \\ + \text{Fläche CBHI} = 4.53 \\ \hline \text{Fläche AKLB} = 15.14 \end{array}$$

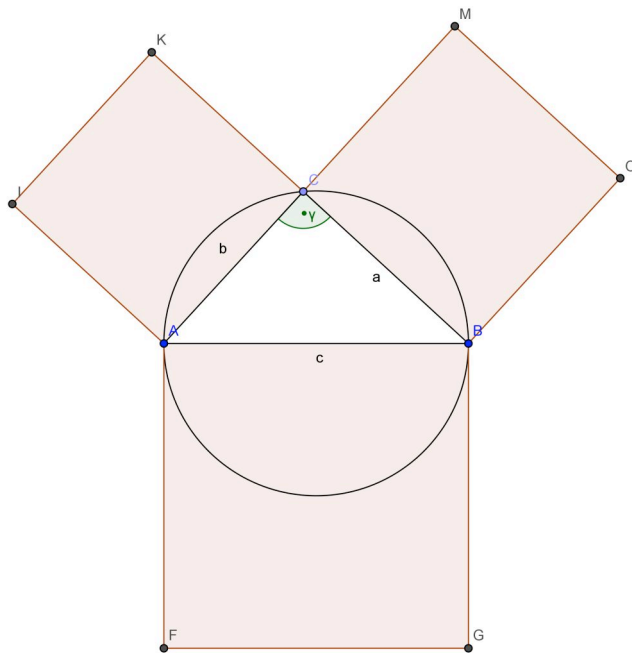


Hier kann allgemein festgestellt werden, dass die Addition der Flächen ACFE und CBHI die Fläche AKLB ergibt. Die Punkte A, B oder C können angefasst werden und das Dreieck kann beliebig verschoben werden. Die Rechnung rechts oben wird dann automatisch angepasst.

Die Texte in den einzelnen Quadraten können wie folgt eingegeben werden.

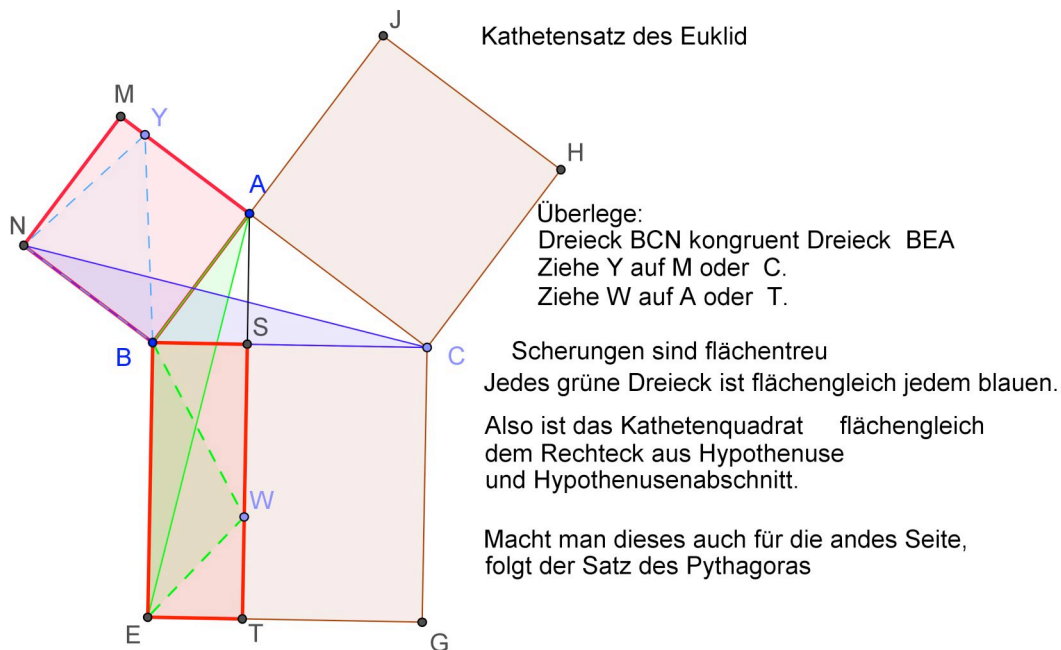
"Fläche " + (Name[C]) + (Name[B]) + (Name[H]) + (Name[I]) + " = " + poly2

DGS: Dynamische Geometrie Software
Datei „Pyth_rechn2.ggb“



Der Unterschied zur Konstruktion/Variabilität des Dreiecks in `Pyth_rechn1.ggb` liegt darin, dass hier die Konstruktion über den Thaleskreis erfolgt. Zusätzlich erscheinen die Angaben für die einzelnen Variablen der Konstruktion links neben der Konstruktion in einem Algebrafenster.

DGS: Dynamische Geometrie Software
Datei „Pyth_Euklid_klassisch.ggb“



Das grüne Dreieck „BEA“ ist kongruent zum blauen Dreieck „BCN“.

Strecken: $|BE| = |BC| = c$
 $|BA| = |BN| = b$

Winkel: $|\text{Winkel EBA}| = |\text{Winkel CBN}| = 90^\circ + |\text{Winkel CBA}|$

Werden die Punkte Y und W auf den Scherungslinien zu den Punkten A bzw. C verschoben, entstehen die Dreiecke BEA bzw. BCN (siehe Bild oben). Wie sich leicht erkennen lässt, sind diese Dreiecke flächengleich. Daraus folgt, dass das Kathetenquadrat gleich groß sein muss wie das Rechteck aus Hypotenuse und Hypotenusenabschnitt (rotes Rechteck). Wenn man diese Schritte auch noch für die andere Seite durchführt, dann ergibt sich daraus der Satz des Pythagoras (Hypotenusenquadrat = Summe der beiden Kathetenquadrate).

Die Dreiecke sind kongruent nach SWS. Man sieht auch, wenn man das blaue Dreiecke drehen würde, dann überlagert es irgendwann das grüne Dreieck. Es gilt: Wenn zwei Dreiecke aus Drehung hervorgehen, müssen sie kongruent sein!

Scherung: $|EB|$ als Grundseite, Lot zu $|EB|$ nach W wenn W auf Parallele läuft.
 Scherungen sind flächentreue Abbildungen, weil der Flächeninhalt immer gleich bleibt.

In diesem Beispiel: Scherung von $M \rightarrow C$
 Drehung blau nach grün
 Scherung von $A \rightarrow W$

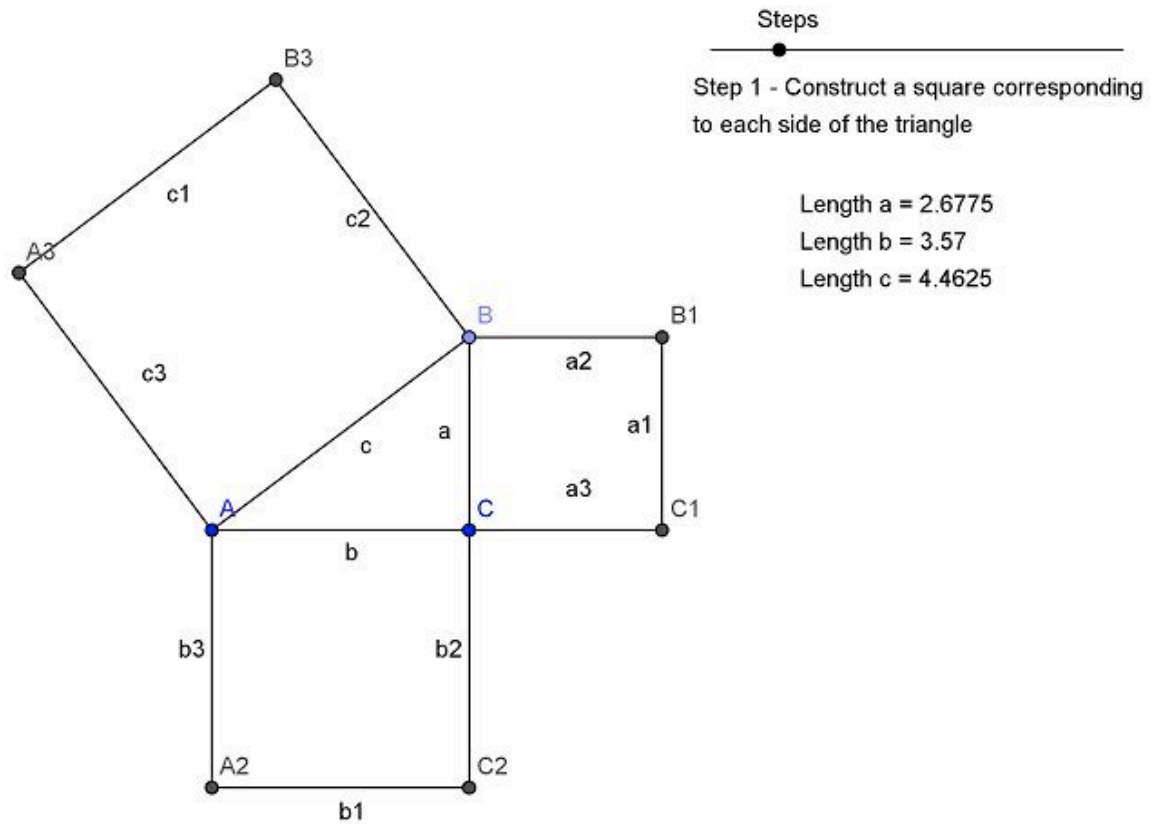
Quelle: Frau Haftendorn

DGS: Dynamische Geometrie Software

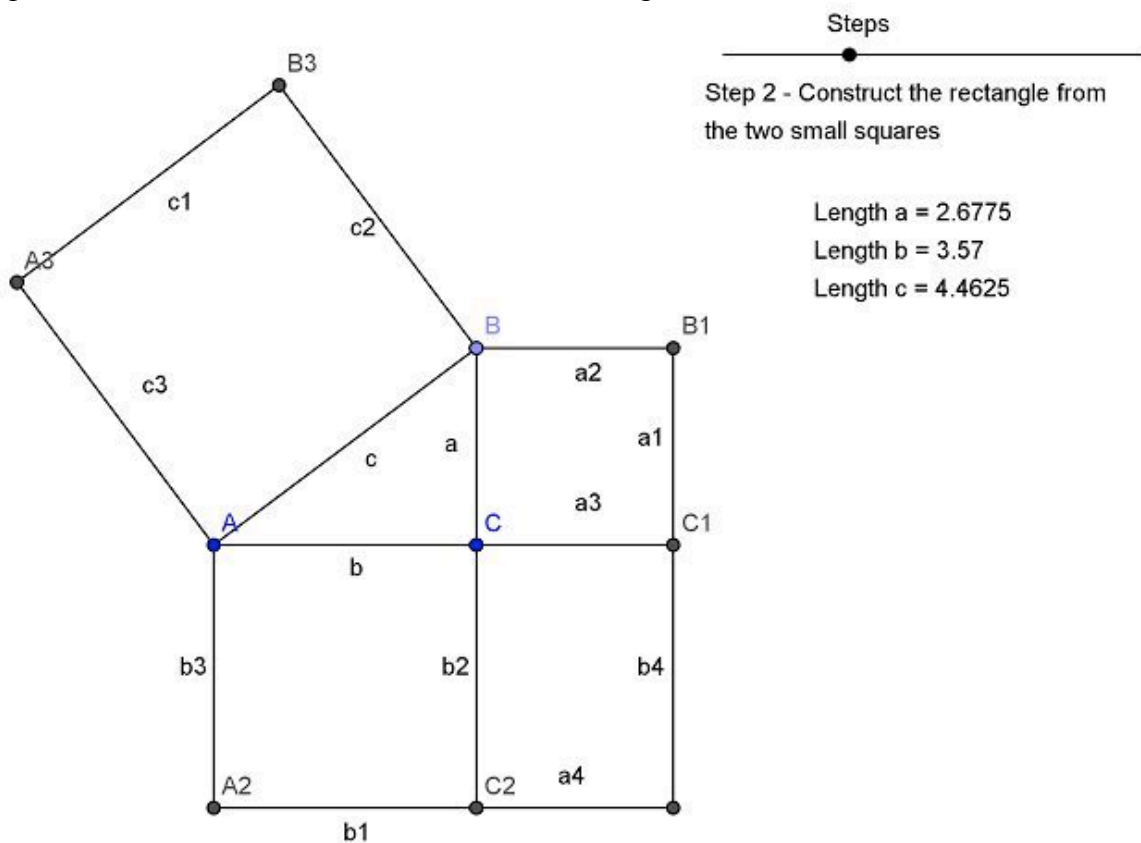
Datei „Pyth_Scherung_neu.ggb“

Den Punkt Steps kann man nach rechts verschieben. →

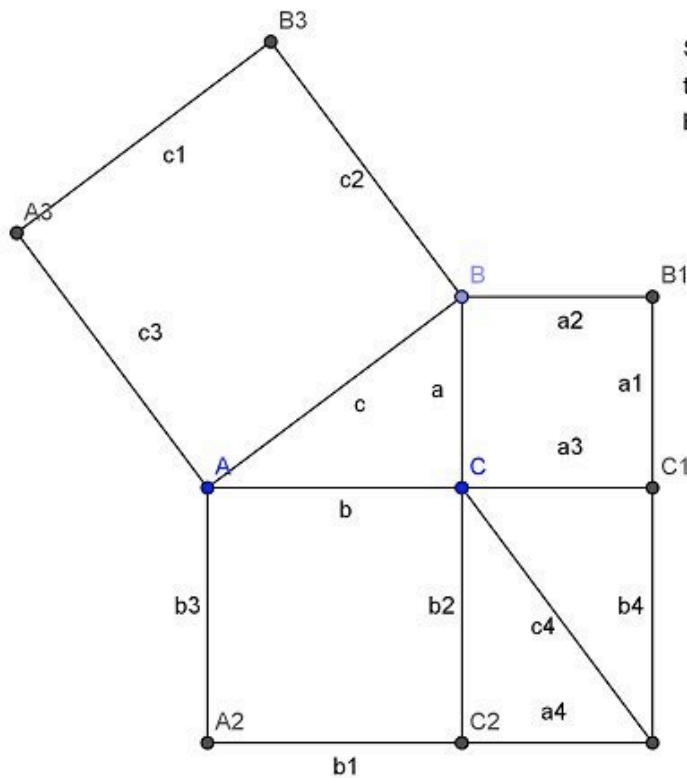
Step 1: Alle Quadrate zu allen Seiten werden konstruiert.



Step 2: Rechteck zwischen zwei kleinen Seiten wird gezeichnet.



Step 3: Film der Scherung



Steps

Step 3 - Divide the rectangle into two triangles with a diagonal starting with the base of the triangle.

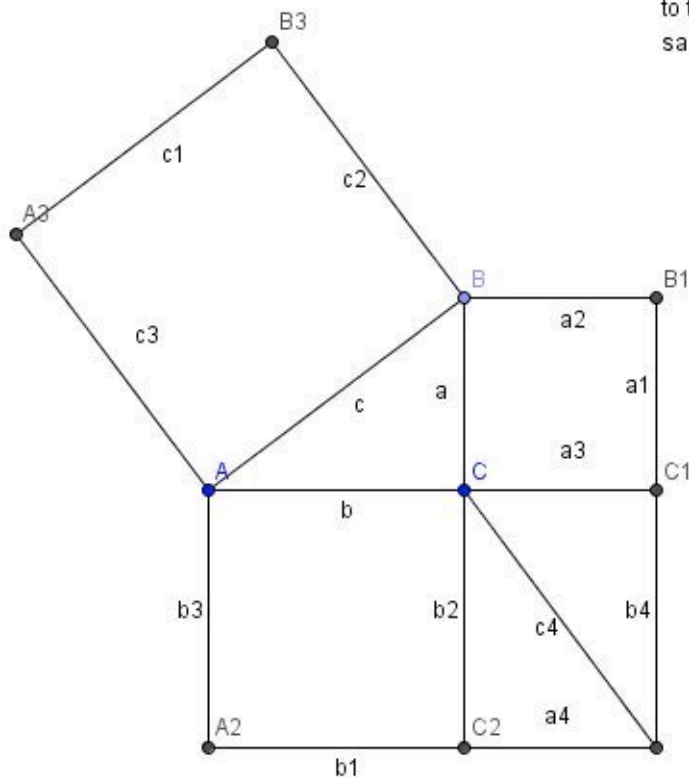
Length $a = 2.6775$

Length $b = 3.57$

Length $c = 4.4625$

Das Rechteck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke geteilt.

Step 4: Film der Scherung



Steps

Step 4 - Show the new triangles are congruent to the original triangle, so c and $c4$ have the same length.

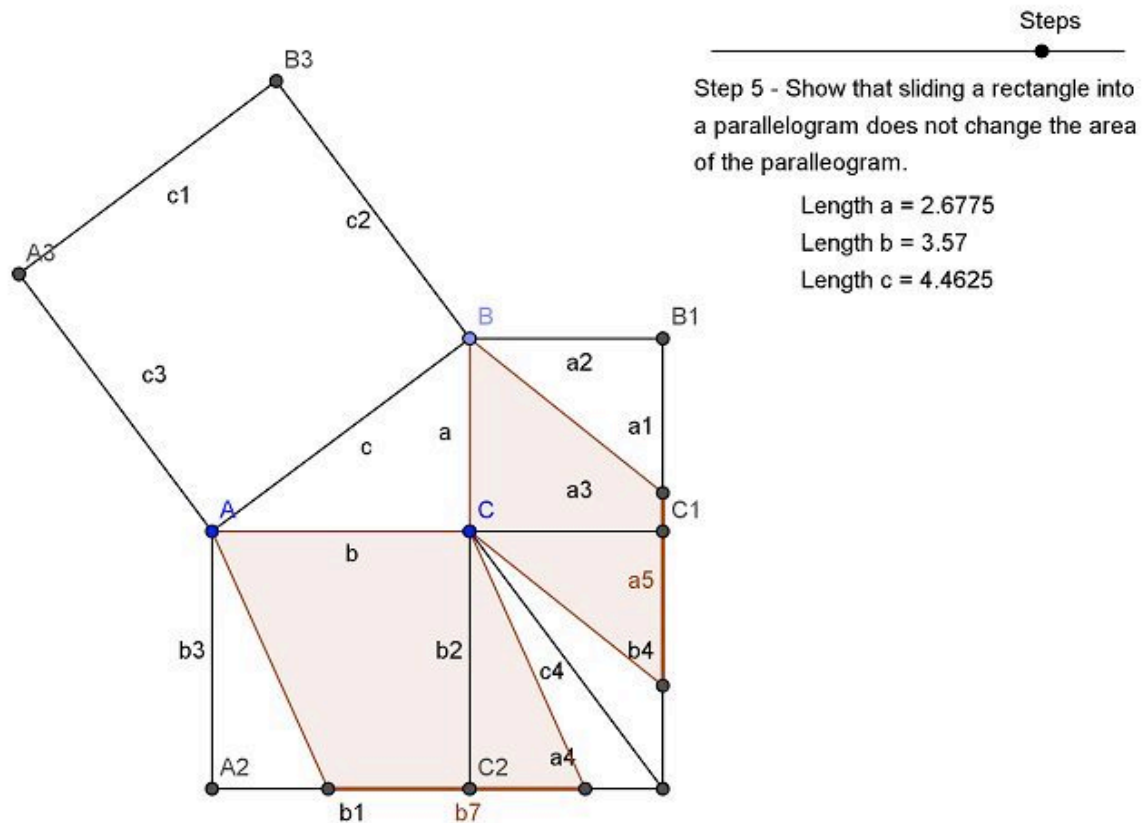
Length $a = 3$

Length $b = 4$

Length $c = 5$

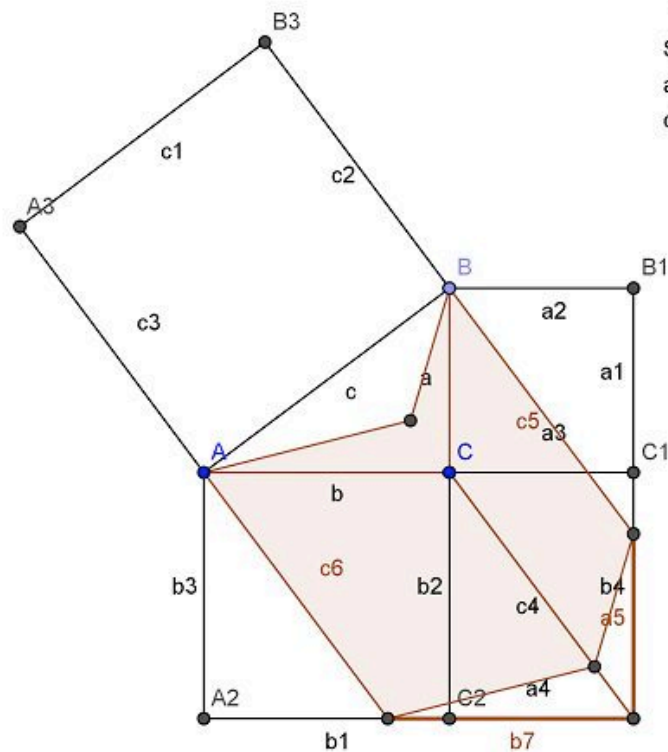
Jetzt kann gezeigt werden, dass die beiden neuen Dreiecke zum originalen Dreieck kongruent sind. Dies geschieht über den Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den Größen „zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel“ (SWS) siehe Vorlesung 07.04.2008 - Kongruenzsätze.

Step 5: Film der Scherung.



Durch Scherung wird aus dem Quadrat/Rechteck ein Parallelogramm. Ein Parallelogramm verändert seine Fläche durch diese Scherung nicht.

Step 6: Film der Scherung.



Steps

Step 6 - Show that sliding the parallelograms along a perpendicular to c does not change their areas.

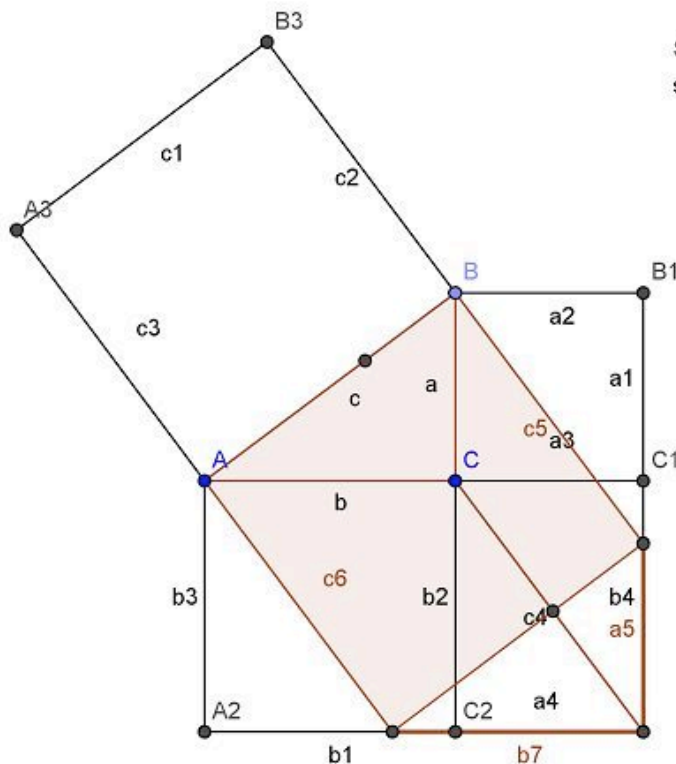
Length $a = 2.6775$

Length $b = 3.57$

Length $c = 4.4625$

Jetzt werden beide Parallelogramme an der Linie c_4 geschert. Dabei verändern die Parallelogramme, wie bekannt, nicht ihre Flächen.

Step 7: Film der Scherung.



Steps

Step 7 - Show the two squares have the same area

Length $a = 2.6775$

Length $b = 3.57$

Length $c = 4.4625$

Zum Schluss sieht man, dass ein Quadrat entsteht mit der Seitenlänge der Hypothenuse. Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

Folgende Schritte können durchgeführt werden:

Die Puzzle-Teile können mit den blauen Punkte verschoben und mit den grünen Punkten gedreht werden.

Schritt 1:

Überzeuge dich, dass mit den grünen Teilen das grüne Quadrat ausgelegt werden kann und dass das blaue Puzzle-Teil mit dem blauen Quadrat übereinstimmt.

Schritt 2:

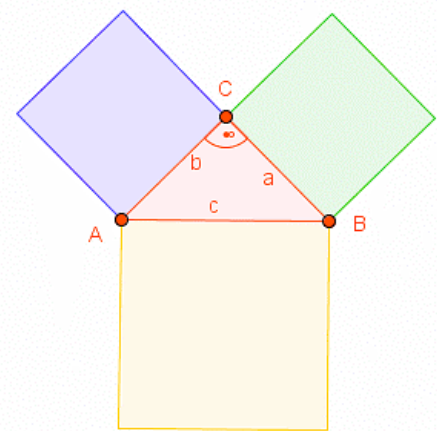
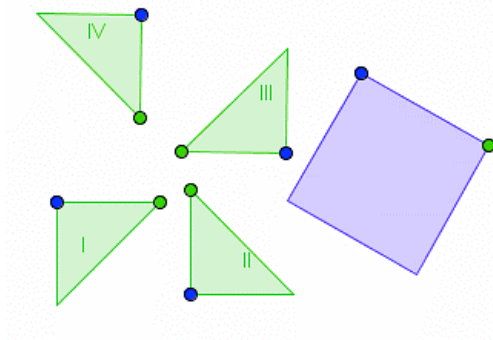
Lege dann mit den grünen und blauen Teilen das gelbe Quadrat aus.

Schritt 3:

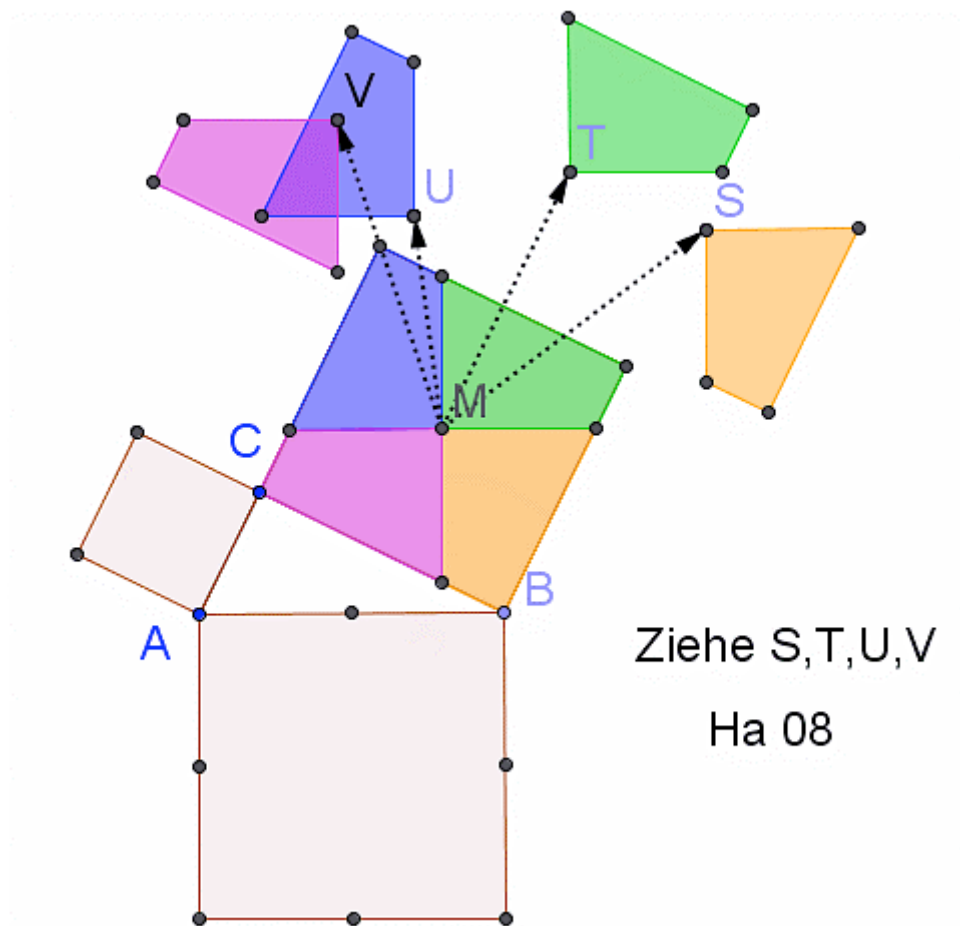
Verändere C. Was passiert mit den grünen Puzzleteilen?

Was passiert mit dem blauen Puzzleteil?

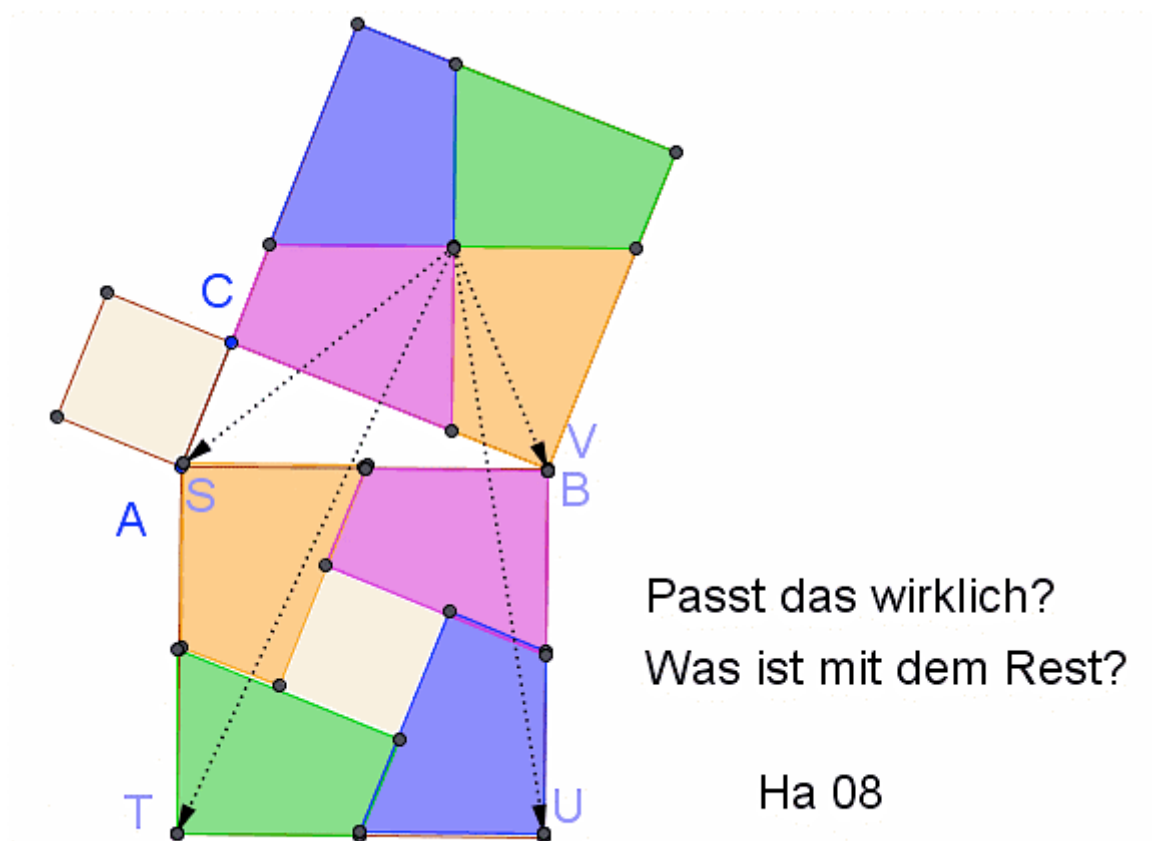
Korrigiere die Lage.



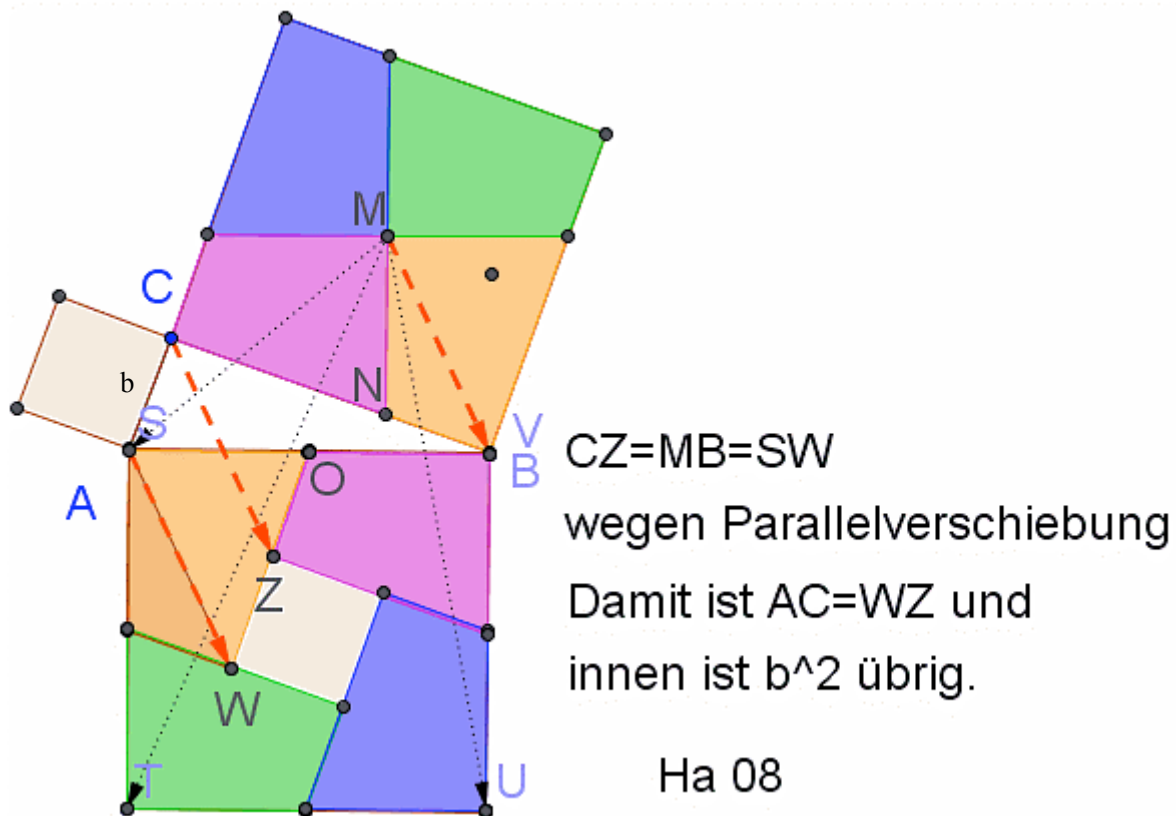
Im folgenden werden die Schritte von Frau Haftendorn erklärt. Die Puzzleteile können zunächst in das Kathetenquadrat verschoben werden.



Anschließend, nach dem Verschieben der Puzzleteile in das Hypothenusenquadrat, stellt sie die Frage: Passt das wirklich genau und was ist mit dem Rest?



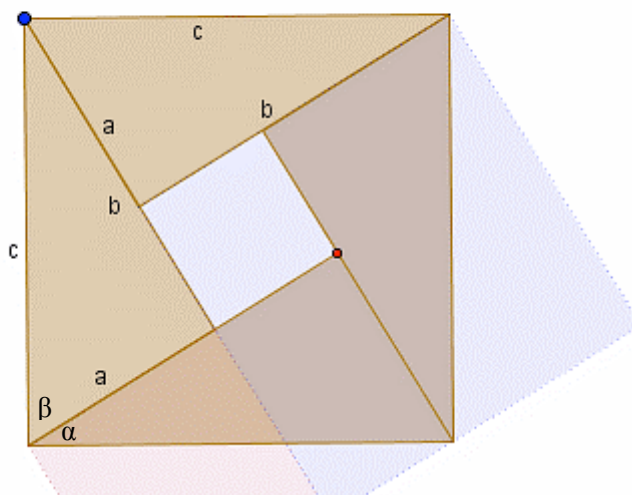
Ist das was im Hypothenusenquadrat übrig bleibt wirklich das kleine Kathetenquadrat?
 Den Beweis schreibt sie rechts: $|CZ| = |MB| = |SW|$, dies ist so wegen der Parallelverschiebung.
 Damit ist $|AC| = |WZ|$ und somit bleibt innen das kleine Kathetenquadrat übrig.



DGS: Dynamische Geometrie Software
 Datei „Pyth_Drehpuzzle1.ggb“

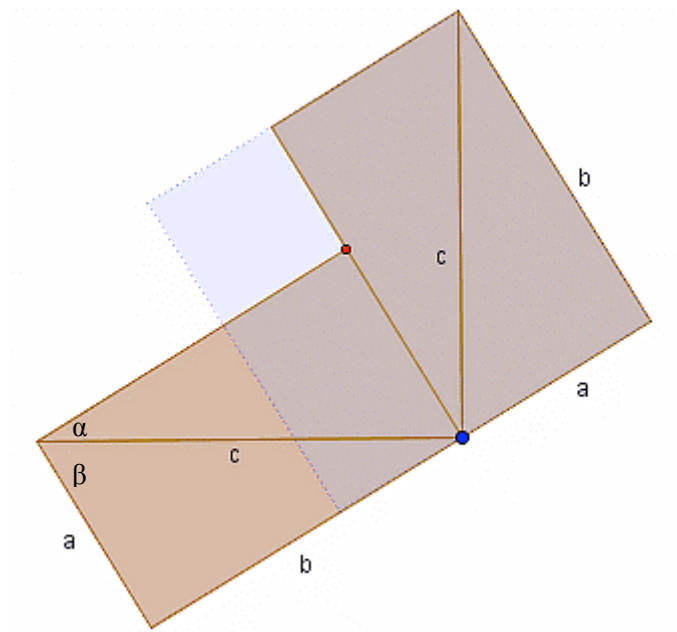
Den blauen Punkt nach links drehen!

Mit dem roten Punkt können die Proportionen verändert werden.



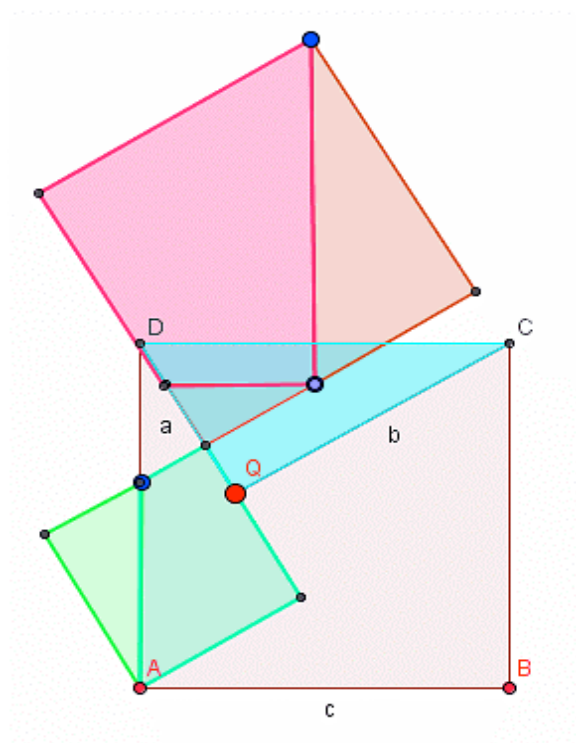
Man erkennt, dass der Winkel $\alpha + \beta = 90^\circ$ ergibt.
 Man erkennt, dass innere Quadrat hat die Seitenlänge $b-a$.

Der gesamte Flächeninhalt beträgt c^2 .

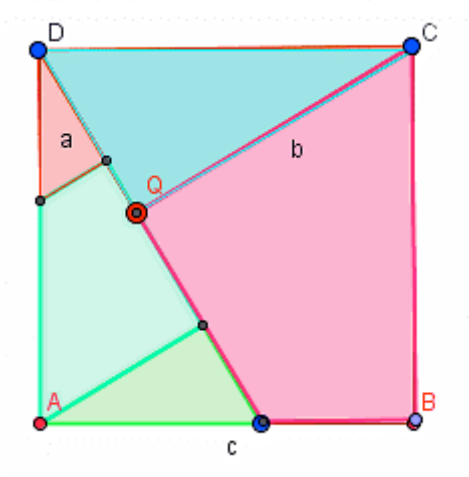
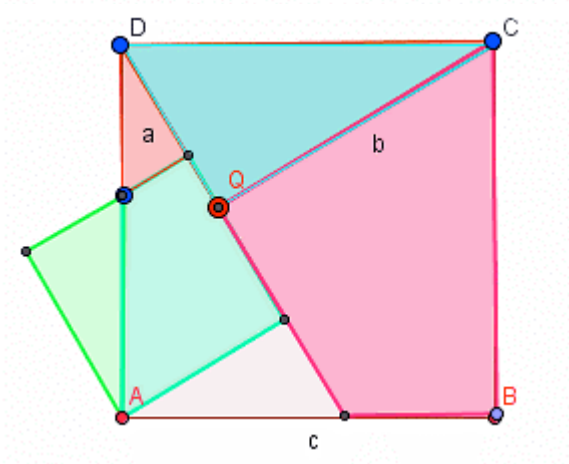
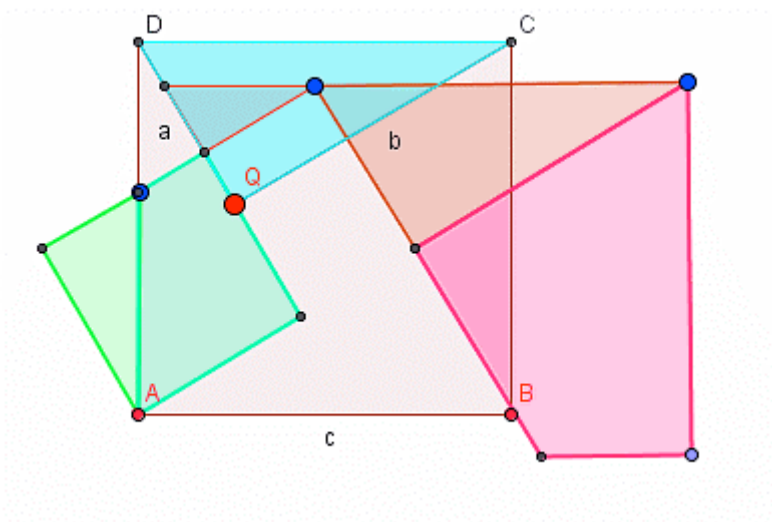


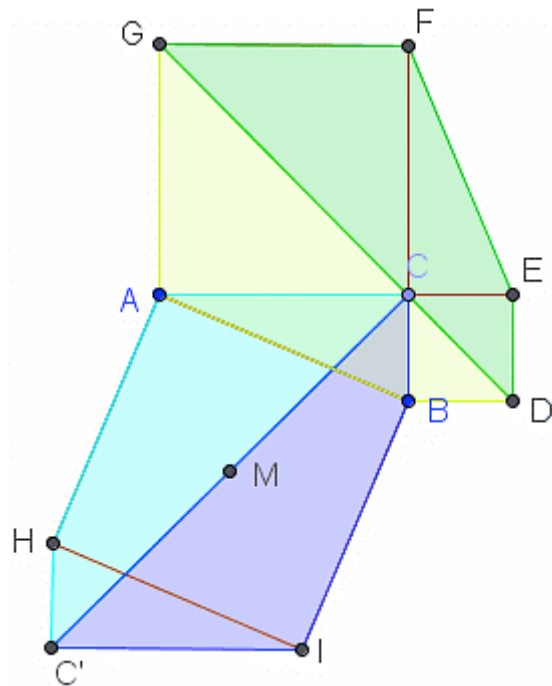
Nach der Drehung ergibt sich mit $\alpha + \beta$ wieder ein 90° -Winkel. Der Flächeninhalt c^2 des obigen Dreiecks lässt sich jetzt durch Addition der Fläche a^2 (hellrotes Quadrat) und b^2 (hellblaues Quadrat) berechnen.

DGS: Dynamische Geometrie Software
Datei „Pyth_Drehpuzzle2.ggb“



Durch ziehen der blauen Punkte kann man erkennen, dass die Kathetenquadrate nur verschoben wurden und jetzt geschickt mit Hilfslinien die konstruiert wurden, „zerschnitten“ werden. Hier können jetzt die einzelnen Teile in das Hypothenusenquadrat des blauen Dreiecks verschoben. Die nachfolgenden Bilder zeigen den Verlauf.





Dreieck ABC ist das Ausgangsdreieck

Dreieck CEF ist kongruent zu ABC, dies folgt aus Kongruenzsatz „zwei Seiten und dem eingeschlossenem Winkel“ SWS. (CE ist genauso lang wie CB und CA ist genauso lang wie CF.
 ????

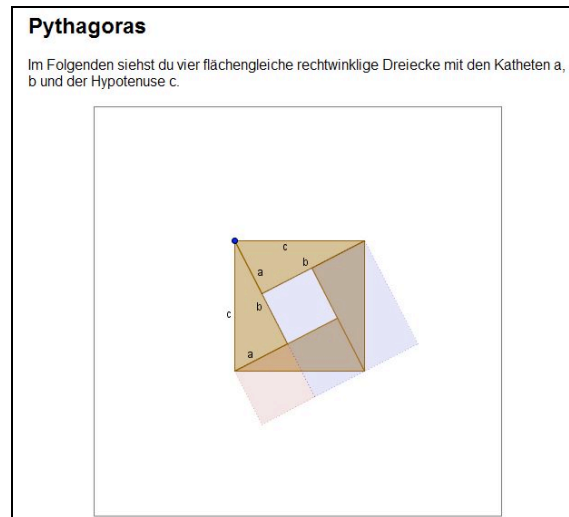
C' wird so konstruiert, dass das Dreieck HC'I kongruent zum Dreieck ABC ist.
 ????

Dann sind die Vierecke AHC'C, IBCC', ABDG, FEDG zueinander kongruent.

2. Wie „klaut“ man Geogebra-Dateien im Internet?

Folgende Schritte sind notwendig:

1. In Google nach dem entsprechenden Thema suchen. Zusätzlich den Suchbegriff „Geogebra“ eingeben, z.B. „Satz des Pythagoras Geogebra“
2. Auf der Internetseite wird nun eine Geogebra-Anwendung gestartet. z.B.:



1. Auf „Ansicht“ → „Quelltext“ klicken
2. Im Quelltext nach dem Begriff „applet“ suchen, z.B.
`<applet code="geogebra.GeoGebraApplet" codebase="http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.jar" width="450" height="450">`
`<param name="filename" value="pythagoras_worksheet.ggb">`
3. Nun den Namen des files kopieren und hinter dem letzten Slash in der Adressleiste des Internetbrowsers einfügen, z.B.
http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/mhohen/examples/pythagoras/pythagoras_worksheet.ggb
4. Die Datei kann herunter geladen werden
(falls erforderlich Namenskürzel in .ggb ändern)