Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG **2**

1 SEHNENVIERECK **3**

1.1 KONSTRUKTION EINES SEHNENVIERECKS 3
1.2 NOTWENDIGE EIGENSCHAFT EINES SEHNENVIERECKS (WINKELSATZ) 4
1.2.1 Beweis des Winkelsatzes 4
1.2.2 Beweis der Umkehrung des Winkelsatzes 5
1.3 KONSTRUKTION EINES SEHNENVIERECKS MITTELS EINES BELIEBIGEN VIERECKS 6
1.3.1 Beweis von 1.3 6

2 TANGENTENVIERECK **7**

2.1 KONSTRUKTION EINES TANGENTENVIERECKS 7
2.2 SATZ ÜBER DIE BERÜHRUNGSSEHNEN 8
2.3 BEWEIS DES SATZES ÜBER DIE BERÜHRUNGSSEHNEN 9

3 SEHNEN-TENGENTEN-VIERECK **10**

3.1 DEFINITION 10
3.2 SATZ ÜBER DIE NOTWENDIGE EIGENSCHAFT EINES SEHNEN-TENGENTEN-VIERECKS 10
3.3 BEWEIS DES SATZES ÜBER DIE NOTWENDIGE EIGENSCHAFT EINES SEHNEN-TENGENTEN-VIERECKS 11

QUELLENANGABE **12**

Einleitung

Diese Hausarbeit wurde im Rahmen der Geometrie-Vorlesung (VAK 03-222) von Prof. Dr. Albers an der Universität Bremen im Fachbereich 03 Mathematik/Informatik erstellt und dient als ergänzende Informationsgrundlage des Vortrages zum Thema „Sehnen-Tangenten-Viereck". Ziel dieser Präsentation war das Nennen und Beweisen einer notwendigen Eigenschaft eines Vierecks, damit das ein Sehnen-Tangenten-Viereck ist. Als Grundlage dieser Hausarbeit dienten, die Inhalte der oben genannten Geometrie-Vorlesung und eine, von Prof. Dr. Albers korrigierte Hausarbeit von Sarah Schultze und Jakob Priwitzer. In dieser Hausarbeit eingesetzte Grafiken wurden mittels der dynamischen Lernsoftware GeoGebra, die im Internet unter der Adresse www.geogebra.at freizugänglich ist, erstellt.

1 Sehnenviereck

Definition:

Ein Viereck, das einen Umkreis besitzt, nennt man ein Sehnenviereck. Anders ausgedrückt ist ein Sehnenviereck ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dem Umkreis des Vierecks. Folglich sind alle Seiten des Sehnenvierecks Sehnen des Umkreises. Beispiel eines Sehnenvierecks *ABCD* ist im Bild 1 dargestellt.

Diese Definition schließt auch überschlagene Vierecke ein. In dieser Ausarbeitung wird stets davon ausgegangen, dass ein konvexes Sehnenviereck vorliegt.

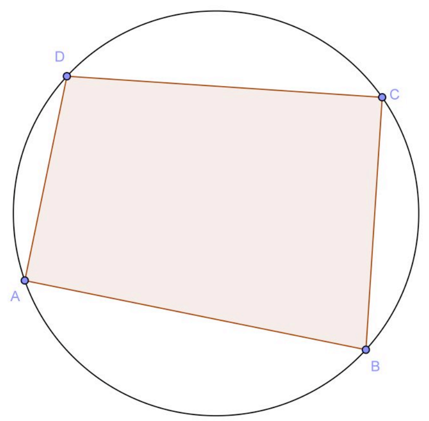

Bild 1: Veranschaulichung eines Sehnevierecks

1.1 Konstruktion eines Sehnenvierecks

Am einfachsten lässt sich ein Sehnenviereck konstruieren, indem man auf einen beliebigen Kreis vier Punkte wählt und diese miteinander verbindet.

1.2 Notwendige Eigenschaft eines Sehnenvierecks (Winkelsatz)

In einem Sehnenviereck ist die Summe der Größen gegenüberliegender Innenwinkel stets 180°.

1.2.1 Beweis des Winkelsatzes

Wenn man die Eckpunkte eines Sehnendreiecks mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, erhält man 4 gleichschenklige Dreiecke (siehe Bild 2). Die Länge der Schenkel ist genau r.

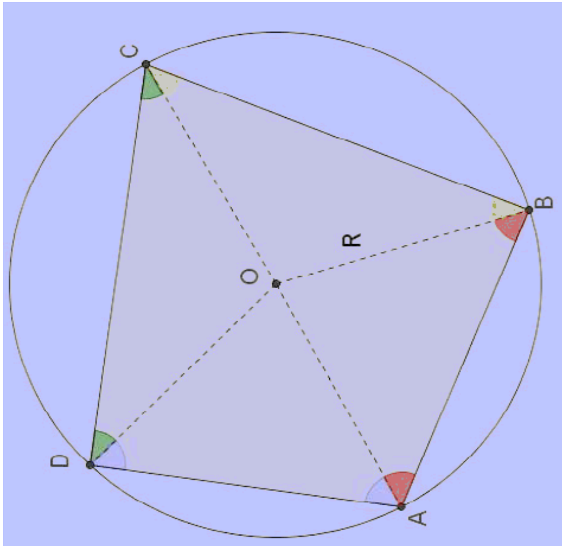

Bild 2: Veranshaulichung von Beweis des Winkelsatzes

Wir wissen also, dass

Winkel OAB = Winkel OBA = rot ;
Winkel OBC = Winkel OCB = gelb ;
Winkel OCD = Winkel ODC = grün ;
Winkel ODA = Winkel OAD = blau ;

Man sieht, dass 2*(*rot* + *gelb* + *grün* + *blau)* = *360°* ist

Daraus folgt also, dass (*rot* + *gelb* + *grün* + *blau)* = *180°* sein muss.

1.2.2 Beweis der Umkehrung des Winkelsatzes

Für den Beweis der Umkehrung de Winkelsatzes wird eine Fallunterscheidung vorgenommen

i)

Angenommen, C liege außerhalb des Kreises und hieße C_1 (Siehe Bild 3 links). Dann gilt im gelben Dreieck nach dem Satz von den Außenwinkeln $\gamma = \gamma_1 - \delta_1$. Daraus folgt, dass $\alpha + \gamma_1 < 180°$ ist.

ii)

Angenommen, C liege innerhalb des Kreises und hieße C_2 (Siehe Bild 3 rechts). Dann gilt im gelben Dreieck nach dem Satz von den Außenwinkeln $\gamma = \gamma_2 - \delta_2$. Daraus folgt, dass $\alpha + \gamma_2 > 180°$ ist.

Aus i) und ii) folgt, dass nur wenn alle vier punkte eines Vierecks auf eine Umkreis liegen ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180°. [2]

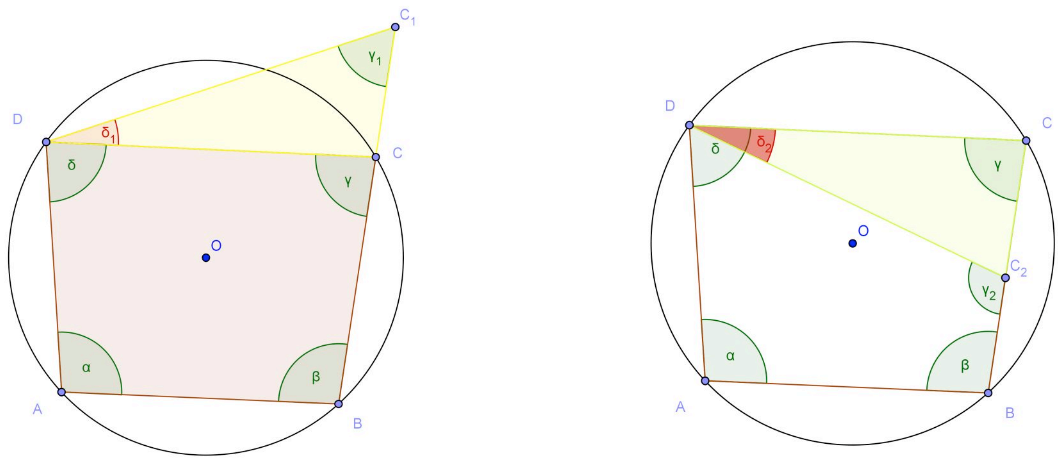

Bild 3: Veranschaulichung von Beweis der Umkehrung des Winkelsatzes

1.3 Konstruktion eines Sehnenvierecks mittels eines beliebigen Vierecks

Eine weitere Möglichkeit ein Sehnenviereck konstruieren zu konstruieren ist in folgenden Schritten beschrieben:

Schritt 1: Zeichnen eines beliebigen Vierecks.

Schritt 2: Einzeichnen von vier Winkelhalbierenden dieses Vierecks

Schritt 3: Verbinden von den Schnittpunkten dieser Winkelhalbierenden

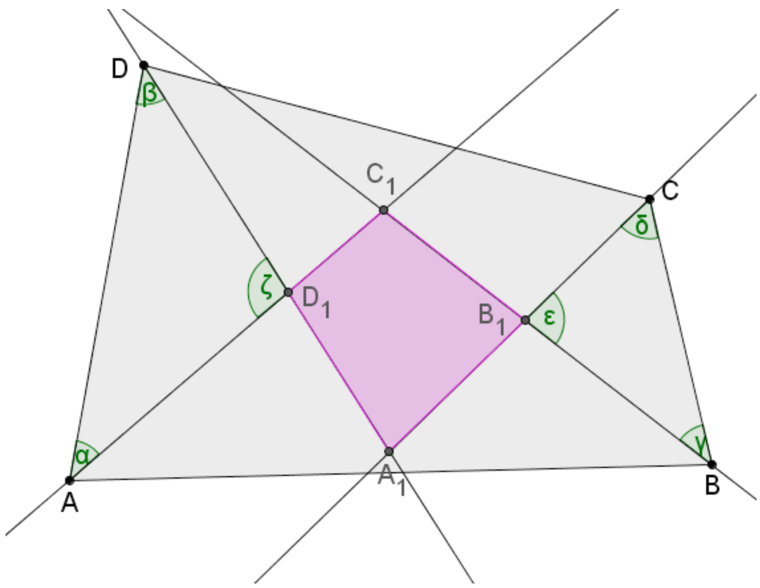

Bild 4: Konstruktion eines Sehnenvierecks mittels eines beliebigen Vierecks

1.3.1 Beweis von 1.3

Beweis:

i) ζ und $\measuredangle A_1D_1C_1$ sind Scheitelwinkel

ε und $\measuredangle C_1B_1A_1$ sind Scheitelwinkel

und

ii) $\varepsilon + \zeta = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180°$

aus i) und ii) folgt: $\measuredangle A_1D_1C_1 + \measuredangle C_1B_1A_1 = 180°$

2 Tangentenviereck

<u>Definition</u>:

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind.

2.1 Konstruktion eines Tangentenvierecks

Die einfachste Möglichkeit ein Sehnenviereck zu konstruieren ist in folgenden Schritten beschrieben:

Schritt 1: Wahl von vier Punkten auf einem beliebigen Kreis.

Schritt 2: Einzeichnen von Tangenten zu diesen Punkten (Berührungspunkte)

Schritt 3: Verbinden von den Schnittpunkten dieser Tangenten

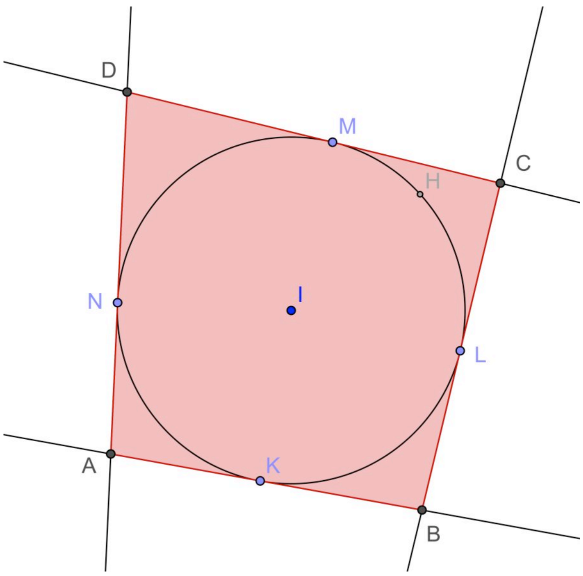

Bild 5: Veranschaulichung der Konstruktion eines Tangentevierecks

2.2 *Satz über die Berührungssehnen*

Definition:

Eine Verbindungsstrecke zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten
heißt Berührungssehne

In einem Tangentenviereck teilt jede Berührungssehne dieses in zwei Vierecke mit jeweils einem Paar gleich großer Winkel.

Im Bild 6 wird veranschaulicht, dass die Berührungssehne $\overline{MK}$ das Tangentenviereck $ABCD$ in zwei Vierecke ($AKMD$ und $KBCM$) mit jeweils einem Paar gleich großer Winkel teilt.

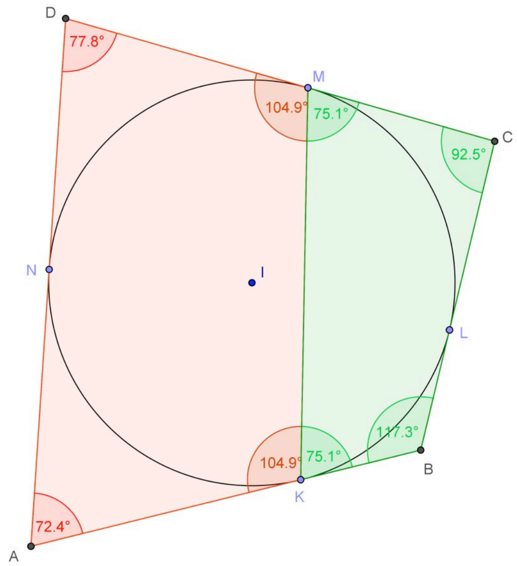

Bild 6: Veranschaulichung des Satzes über die Berührungssehnen

2.3 Beweis des Satzes über die Berührungssehnen

Für die Berührungssehne $\overline{KM}$ gilt, dass die Winkel $DMK = MKA$ und $BKM = CMK$ sind.

Für den Beweis werden zu nächst zwei Hilfsstrecken $\overline{IK} = \overline{IM} = Inkreisradius$ eingezeichnet (siehe Bild 7).

Das heißt, dass das dabei entstandene $\triangle IKM$ gleichschenklig ist.

Daraus folgt:

i) grüne Winkel sind gleich groß

ii) blaue Winkel sind gleich groß weil $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ Tangenten und deshalb jeweils senkrecht zu $\overline{IK}$ und $\overline{IM}$ sind

Aus i) und ii) folgt: $\measuredangle DMK = \measuredangle MKA$.

Weil aber die Winkel DMK und MKA jeweils Supplementwinkel für die Winkel CMK und BKM sind, müssen diese auch gleichgroß sein.

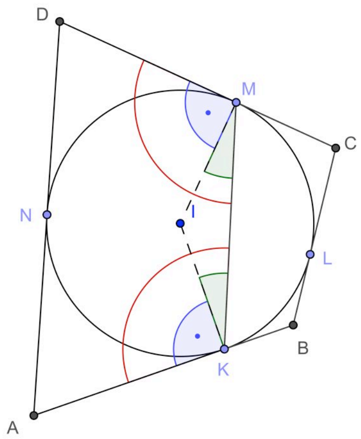

Bild 7: Beweis des Satzes über die Berührungssehnen

3 Sehnen-Tengenten-Viereck

3.1 Definition

Vierecke die sowohl Sehnenvierecke als auch Tangentenvierecke sind, werden als Sehnen-Tangenten-Viereck bezeichnet.

3.2 Satz über die notwendige Eigenschaft eines Sehnen-Tengenten-Vierecks

In einem Sehnen-Tangenten-Viereck stehen die Berührungssehnen zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten senkrecht aufeinander. Der Satz ist im Bild 8 veranschaulicht.

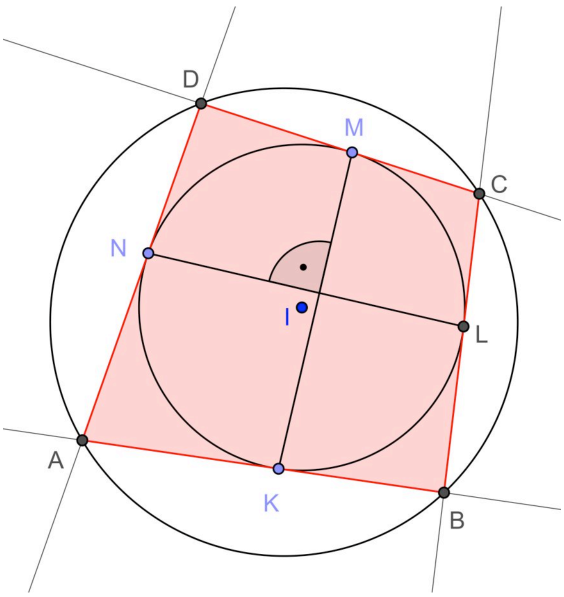

Bild 8: Eigenschaft eines Sehnen-Tangenten-Vierecks

3.3 Beweis des Satzes über die notwendige Eigenschaft eines Sehnen-Tengenten-Vierecks

Wir gehen also von einem Sehnen-Tangenten-Viereck (siehe Bild 9) aus und wollen zeigen, dass dessen Berührungssehnen senkrecht zu einander stehen müssen.

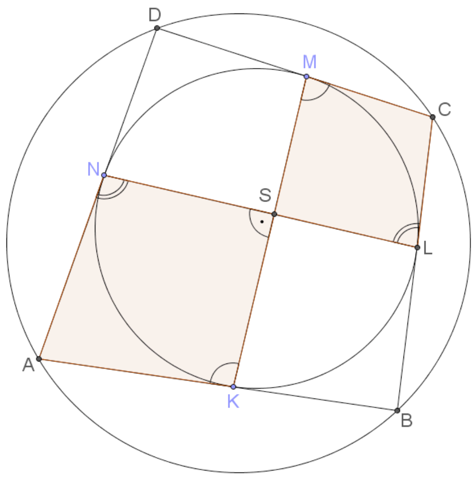

Bild 9: Beweis des Satzes über die notwendige Eigenschaft eines Sehnen-Tengenten-Vierecks

Sei s der Schnittpunkt der beiden Berührungssehnen $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$. Man betrachte nun die beiden Vierecke $AKSN$ und $CMSL$ (im Bild 9 als rot markiert), deren Winkelsumme jeweils 360° beträgt. Nach dem Satz 3.1 über die Berührungssehnen im Tangentenviereck, sind $\measuredangle SKA + \measuredangle SMC = 180°$ und $\measuredangle CLS + \measuredangle ANS = 180°$, da diese jeweils Supplementwinkel sind. Für die verbleibenden Winkel in den beiden roten Vierecken, bleibt daher ebenfalls eine Summe von 180°.

i) Das heißt, dass $\measuredangle NSK + \measuredangle KAN = 180°$ und $\measuredangle MCL + \measuredangle LSM = 180°$ sind.

Nach der Unkehrung von Satz 1.2 gilt,

ii) dass $\measuredangle KAN + \measuredangle MCL = 180°$ sind.

Aus i) und ii) folgt, dass die Winkel in S einander zu 180° ergänzen. Da es sich hierbei aber gerade um Scheitelwinkel, also gleichgroße Winkel handelt, sind diese jeweils 90°. Damit wurde bewiesen, dass beiden Berührungssehnen eines Sehnen-Tangen-Vierecks notwendiger Weise senkrecht zu einander sind.

Quellenangabe

[1] Hausarbeit von Sarah Schultze & Jakob Priwitzer

[2] http://www.mathematische-basteleien.de/sehnenviereck.htm (10.05.2008)