UNIVERSITÄT BREMEN

Fachbereich 03

Sommersemester 2008

Titel der Veranstaltung:

**Geometrie**

**Seminararbeit**

im Rahmen des Masterabschlusses

Gewerblich-Technische-Wissenschaften Elektrotechnik/Informatik

an der Universität Bremen

| | | |
|---|---|---|
| Seminarleiter: | Dr. Reimund Albers | |
| | Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen | |
| Erstellt von: | Alwin Uden | Matr.-Nr. 2172105 |
| | Matthias de Buhr | Matr.-Nr. 2172152 |

Bremen, den 26.05.2008

0. Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

In diesem Bericht wird des um den Satz von Menelaos und dem Satz von Ceva sowie mit deren Beweisführungen gehen. Einleitend werden jeweils ein paar geschichtliche Hintergründe aufgezeigt.
Um die Sätze zu beweisen werden jeweils zwei unterschiedliche Beweisführungen vorgestellt. Der Satz von Menelaos wird sowohl mit Hilfe des 1. Strahlensatzes als auch des 2. Strahlensatzes bewiesen. Diese werden zur Erinnerung im Kapitel 2.4 kurz erläutert.
Beim Satz von Ceva wird bei der ersten Beweisführung ebenfalls der 2. Strahlensatz verwendet. Im zweiten Beweis werden bestimmte Flächenverhältnisse ausgenutzt. Da beide Sätze umkehrbar sind, werden auch die Beweisführungen in umgekehrter Richtung vorgestellt sowie einige Anwendungsbeispiele.

# 2. Der Satz von Menelaos

## *2.1 Geschichtlicher Hintergrund*

Der *Satz von Menelaos* (Transversalensatz) wurde nach dem griechischen Astronom und Mathematiker Menelaos von Alexandria benannt. Leider ist nur sehr wenig über Menelaos bekannt. Überlieferungen zufolge wurde Menelaos in Alexandria um 70 nach Christi geboren und starb ca. 140 nach Christi. Nachdem er seine Jugend in Alexandria verbracht hatte, zog er nach Rom. Hier beschäftigte er sich mit dem Übertragen der Begriffe Seite, Winkel und Dreieck von der Ebene auf die Kugel, machte astronomische Beobachtungen und schrieb zahlreiche Bücher. Es ist nur ein einziges Werk von Menelaos erhalten geblieben: die Sphärik. In der *Sphärik* entwickelte er die Grundlagen der sphärischen Geometrie und definierte zum ersten Mal in der Geschichte ein sphärisches Dreieck.
Der *Satz von Menelaos* wurde lange Zeit Ptolemaeus (100-160 n. Chr., Alexandria) zugeschrieben, da er in dessen Monumentalwerk *Almagest* als Fundamentalsatz der Trigonometrie verwendet wurde. Dieser ist das hauptsächliche Hilfsmittel bei astronomischen Berechnungen, die Ptolemaeus in *Almagest* durchführt.
Erst Pater Mersenne (1588-1648) bemerkte im 17. Jahrhundert, dass der Satz in der *Sphärik* von Menelaos vorkommt. Im Mittelalter wurde der Satz von Menelaos häufig verwendet. Aus dieser Zeit stammt der Satz von Ceva (1648-1737, italienischer Mathematiker). Beide Aussagen zusammen und ihre Verallgemeinerungen auf sphärische Dreiecke nannte man *regula sex quantitatum.* Die Beweise wurden früher meist mit Schwerpunktuntersuchungen geführt.

## 2.2 *Die Aussage des Satzes*

Sind die Punkte M, N, O auf den (geeignet verlängerten) Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC kollinear (liegen sie alle also auf einer gemeinsamen Geraden), dann gilt:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = 1 \qquad (1)$$

Die Transversale, die ein Dreieck in drei Punkten schneidet, definiert auf den Dreiecksseiten bzw. ihren Verlängerungen Teilungsverhältnisse. **Laut Menelaos ist das Produkt dieser Verhältnisse eins.**

Der Satz von Menelaos macht also eine Aussage über Geraden, die Dreiecke schneiden.

## 2.3 *Erläuterung Kolinearität*

(Zwei prinzipielle Lagen der Punkte)

1. Verlängerung von einer Seite:

Verlängert man in einem Dreieck ΔABC eine Seite (in diesem Fall AB) dann sind die Punkte M, N und O kollinear zueinander, sie liegen also auf einer Geraden (s. Abb.1).

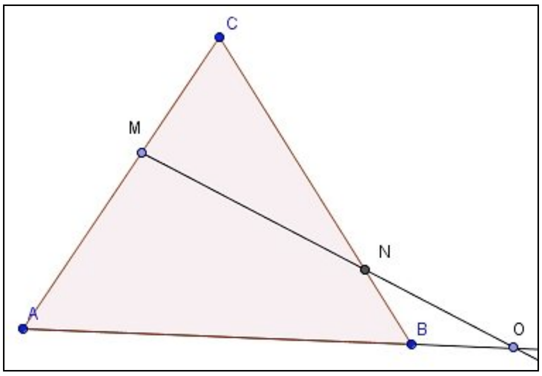



**Abbildung 1**

2. Verlängerung von drei Seiten:

Verlängert man in einem Dreieck ΔABC alle drei Seiten, so sind die Punkte M, N und O kollinear zueinander, sie liegen also auf einer Geraden (s. Abb.2).

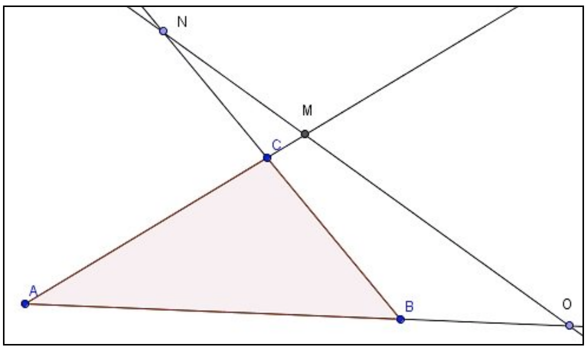


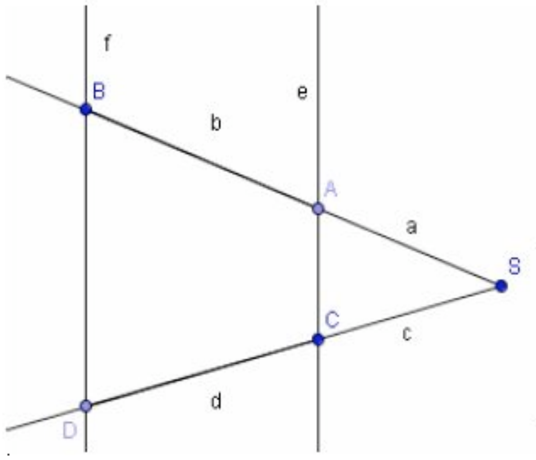

**Abbildung 2**

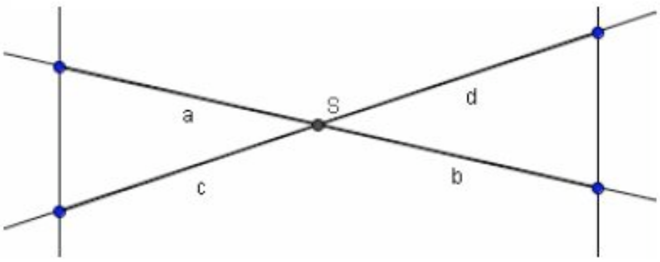
## 2.4 *Strahlensätze*

Wir wollen noch einmal die Strahlensätze auflisten, da diese für viele Anwendungen dieses Referats gebraucht werden.

**1. Strahlensatz:**

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahlen wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.




Es gilt:

$$\frac{SA}{SB}=\frac{SC}{SD};\frac{SA}{AB}=\frac{SC}{CD};\frac{SB}{AB}=\frac{SD}{CD}\text{ bzw.}$$

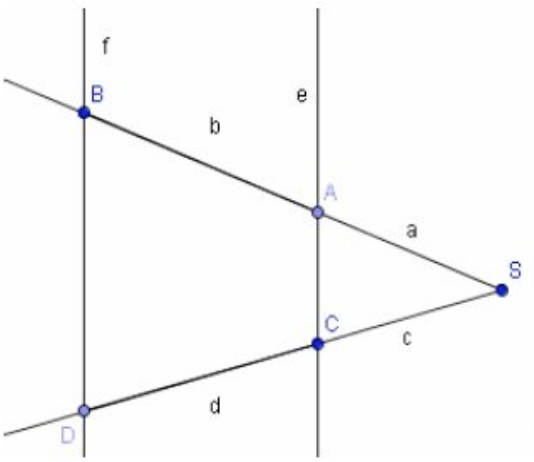
$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

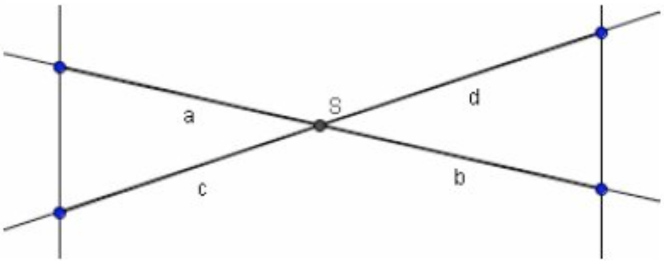
Es gilt:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

**2. Strahlensatz:**

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenenentsprechenden Abschnitte auf jedem Strahl.




Es gilt:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{SA}{SB};\frac{AC}{BD}=\frac{SC}{SD}$$

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{a+b};\frac{e}{f}=\frac{c}{c+d}$$

Es gilt:

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b};\frac{e}{f}=\frac{c}{d}$$

## 2.5 *Beweise*

### 2.5.1 Beweis des Satzes von Menelaos an Hand des ersten Strahlensatzes[1]

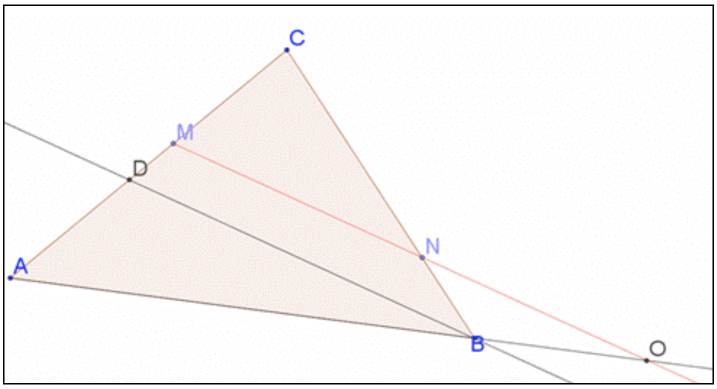



**Abbildung 3**

Bei diesem Beweis wird in dem Dreieck (s. Abb. 3) eine Parallele Gerade zur Transversalen MO durch den Punkt B gezogen. Durch diese zusätzliche Gerade DB entstehen zwei Figuren des ersten Strahlensatzes. Eine Figur mit dem Zentrum A und eine Figur mit dem Zentrum C.

$Zentrum\ A{:}\ \frac{AO}{BO} = \frac{AM}{DM} \qquad Zentrum\ C{:}\ \frac{BN}{CN} = \frac{DM}{MC}$

Es ist nun zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = 1$$

„$\Rightarrow$"

An Hand der aufgestellten Gleichungen durch den ersten Strahlensatz, kann diese Behauptung nun gezeigt werden:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = \frac{AM}{DM} \times \frac{DM}{MC} \times \frac{MC}{AM} = \frac{AM}{AM} \times \frac{DM}{DM} \times \frac{MC}{MC} = 1$$

„$\Leftarrow$"

Angenommen die Gerade MO schneidet BC in N´. Dann gilt:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = 1 = \frac{AO}{BO} \times \frac{BN`}{CN`} \times \frac{CM}{AM}$$

Und es folgt also

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BN`}{CN`}$$

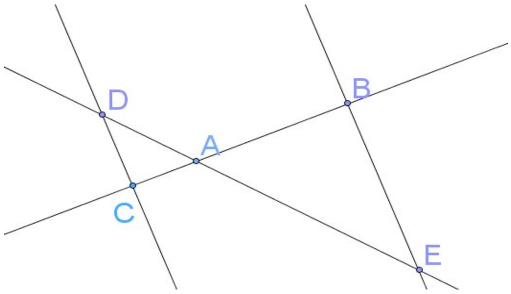
Die Punkte N´ und N teilen die Strecke $\overline{BC}$ im gleichen Verhältnis, also sind N´ und N identisch und die Punkte M, N und O sind kollinear. → q.e.d

Der Satz von Menelaos ist damit ein Kriterium der Kollinearität.

[1] Der Beweis des *Satzes von Menelaos* an Hand des ersten Strahlensatzes für „Verlängerung von einer Seite" und „Verlängerung von drei Seiten" ist identisch.

**Zu Erinnerung: Der zweite Strahlensatz**

Wenn zwei durch einen Punkt (Scheitel) verlaufende Geraden (Strahlen) von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, die nicht durch den Scheitel gehen, dann gilt folgende Gleichung:




$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$$

## 2.5.2 Beweis des Satzes von Menelaos an Hand des zweiten Strahlensatzes

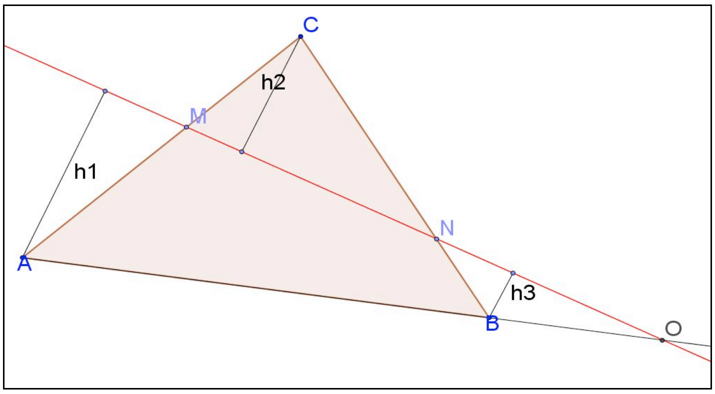



**Abbildung 4**

Man fällt auf die Gerade MO (s. Abb. 4) die Lote der Eckpunkte A, B und C des Dreiecks. Diese Lote werden hier mit h1, h2 und h3 benannt. Da h1, h2 und h3 senkrecht auf MO liegen, sind sie parallel zueinander:

$h_1 \parallel h_2 \parallel h_3$

„$\Rightarrow$“

Aufgrund dieser Parallelität gelten nach dem 2. Strahlensatz folgende Gleichungen:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{h1}{h3}; \frac{BN}{CN} = \frac{h3}{h2}; \frac{CM}{AM} = \frac{h2}{h1}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = \frac{h1}{h3} \times \frac{h3}{h2} \times \frac{h2}{h1}$$

Kürzt man nun, erhält man die zu beweisende Gleichung:

$$\frac{AO}{BO} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CM}{AM} = 1$$

„$\Leftarrow$“ analog zu: Beweis des Satzes von Menelaos an Hand des ersten Strahlensatzes

→ q.e.d

# 3. Der Satz von Ceva

## *3.1 Geschichtliches*

Der *Satz von* Ceva stammt vom italienischen Mathematiker Giovanni Ceva. Er wurde am 7. Dezember 1647 in Mailand geboren. Nach dem Besuch der jesuitischen Hochschule in Mailand und einem Studium der Mathematik an der Universität von Pisa arbeitete er ab 1686 als Professor der Mathematik an der Universität von Mantua. Zu diesem Zeitpunkt war er 39 Jahre alt. Sein besonderes Interesse schon galt schon dort der Geometrie Den Satz von Ceva veröffentlichte er mit 31 Jahren in seinem Buch „De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio“ im Jahr 1678. Im Laufe seines Lebens veröffentlichte er weitere Bücher der Mathematik sowie eines über Hydraulik. Giovanni Ceva verstarb 1734 in Mantua im Alter von 87 Jahren.

Um den Satz von Ceva einzuführen, wird der Begriff der Ecktransversalen benötigt. Eine Strecke, die eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkt auf der gegenüberliegenden Seite verbindet, heißt Ecktransversale.

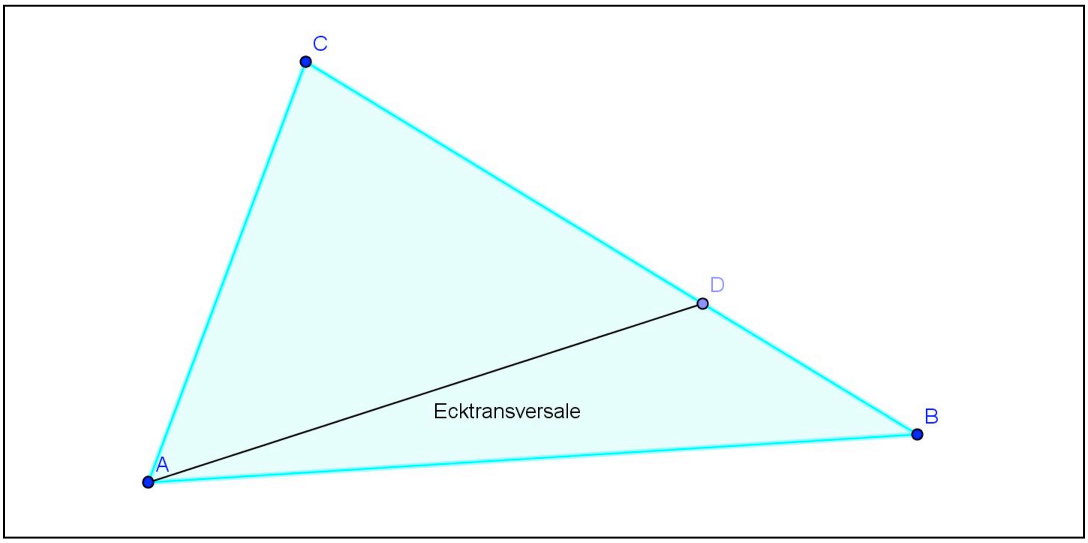



**Abbildung 5**

### 3.2 *Aussage des Satzes*

Schneiden sich drei Ecktransversalen AD, BE und CF eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt, dann gilt (vgl. Abbildung…):

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \qquad (*)$$

Der Satz von Ceva ist umkehrbar (s. Kap……….).

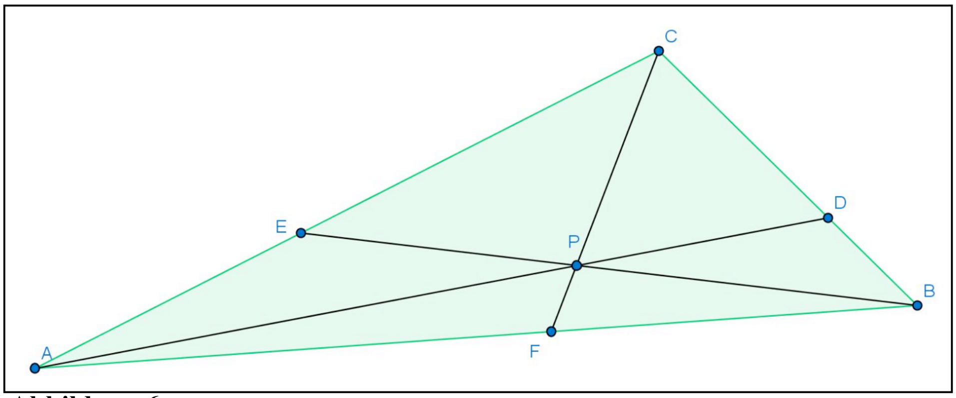



**Abbildung 6**

### 3.3 *„Finden" des Satzes*

Mit Hilfe von Punkten auf den Seiten des Dreiecks ΔABC lässt sich der Satz von Ceva „finden".

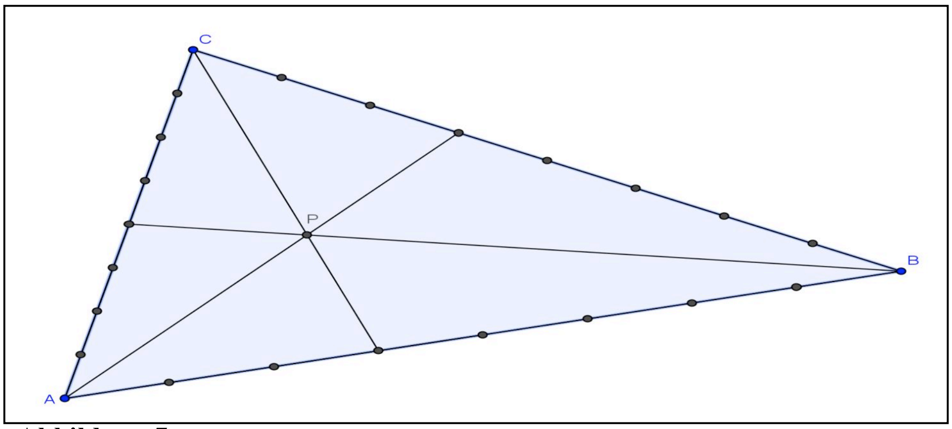



**Abbildung 7**

Die Seiten des Dreiecks werden jeweils z.B. in 8 gleich große Streckenabschnitte unterteilt. Aus Abbildung 3 lässt sich folgender Zusammenhang erkennen:

$$\frac{3/8}{5/8} * \frac{5/8}{3/8} * \frac{4/8}{8/4} = \frac{3}{8} * \frac{8}{5} * \frac{5}{8} * \frac{8}{3} * \frac{4}{8} * \frac{8}{4} = 1$$

### 3.4 *Beweis mit Hilfe des 2 Strahlensatzes*

„Hinrichtung“:

Schneiden sich drei Ecktransversalen AD, BE und CF eines Dreiecks ABC in einem Punkt, dann gilt

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \qquad (*)$$

Zunächst wird die Parallele zu AB durch C gezogen und die jeweiligen Ecktransversalen so verlängert, dass die Schnittpunkte G und H entstehen.

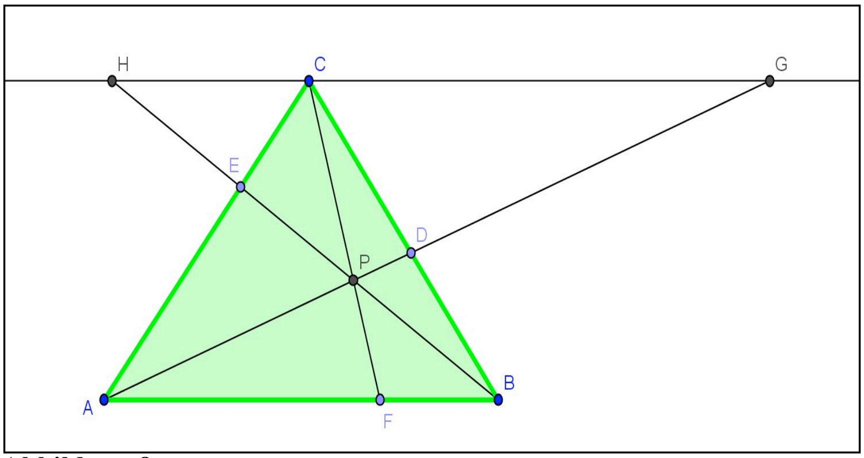



**Abbildung 8**

Nun gibt es drei Möglichkeiten, wo sich der Schnittpunkt der Ecktransversalen befinden könnte:

1. Der Schnittpunkt P der Ecktransversalen liegt außerhalb des Dreiecks Δ ABC und unterhalb der Parallelen zu AB.

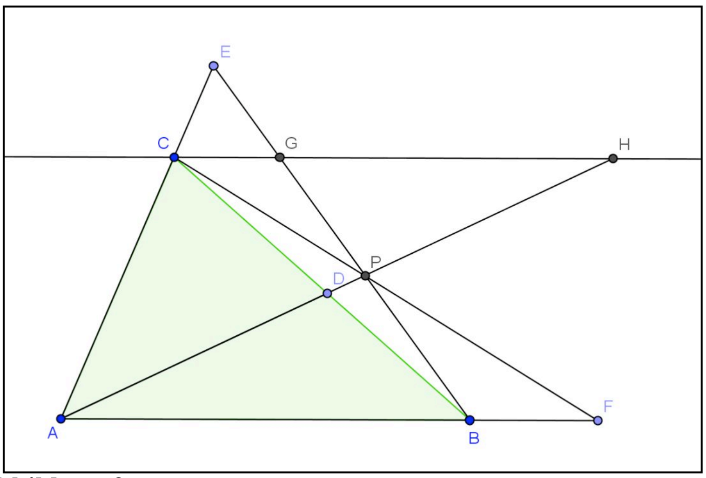



**Abbildung 9**

2. Der Schnittpunkt P der Ecktransversalen liegt außerhalb Δ ABC und oberhalb der der Parallelen zu AB.

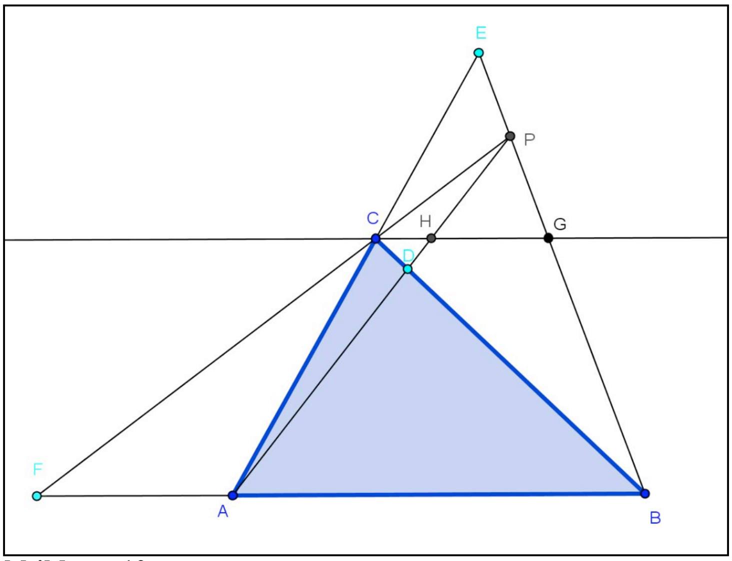


**Abbildung 10**

3. Der Schnittpunkt P der Ecktransversalen P liegt im Innern des Dreiecks Δ ABC.

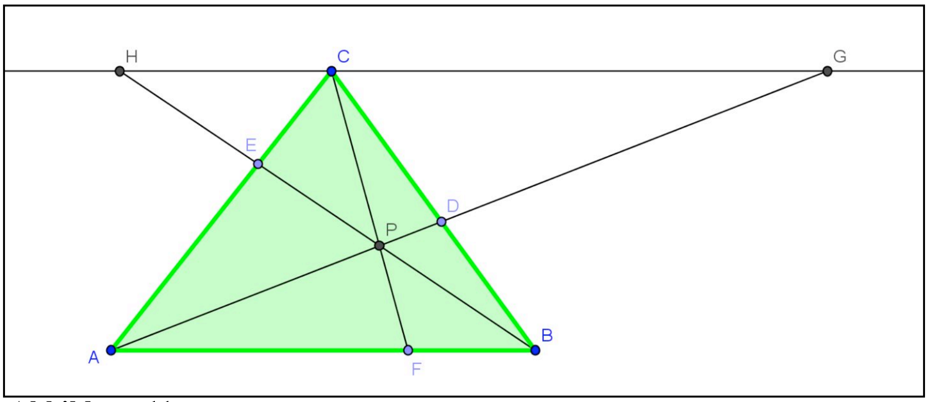


**Abbildung 11**

In Abbildung 11 lassen sich vier Paare von ähnlichen Dreiecken erkennen. Diese werden zu Verdeutlichung in den Abbildungen 12 - 15 dargestellt.

1. ΔABE ~ ΔCHE

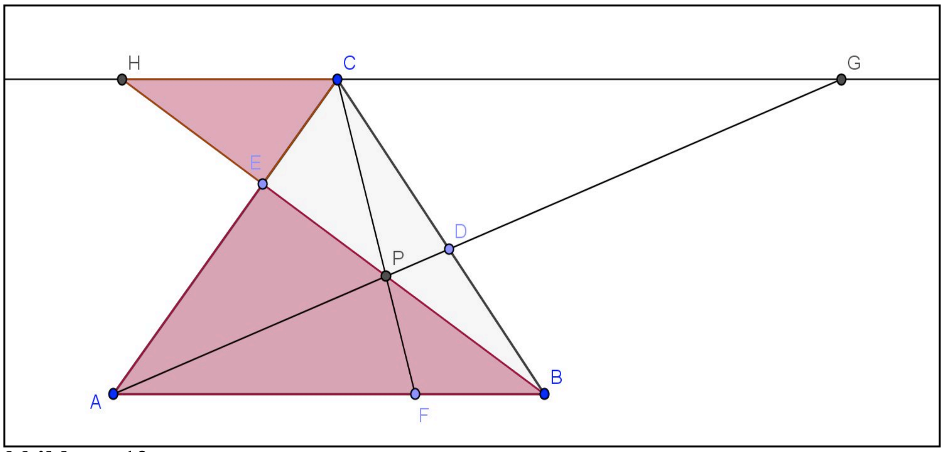


**Abbildung 12**

Mit Hilfe des 2. Strahlensatzes kann folgende Verhältnisgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} \qquad (*)$$

Das Zentrum befindet sich hier im Punkt E.

2. $\Delta ABD \sim \Delta GCD$

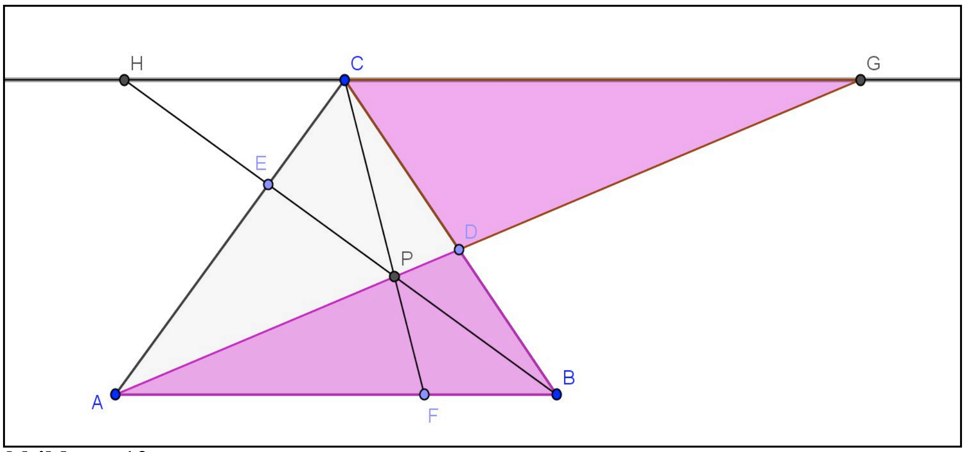


**Abbildung 13**

Hier gilt mit Hilfe des 2. Strahlensatzes die folgende Gleichung (Zentrum im Punkt D):

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CG}} \qquad (**)$$

3. $\Delta CHP \sim \Delta FBP$

In den Abbildungen 14 und 15 lassen sich folgende Beziehungen herstellen:

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CG}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \qquad (***)$$

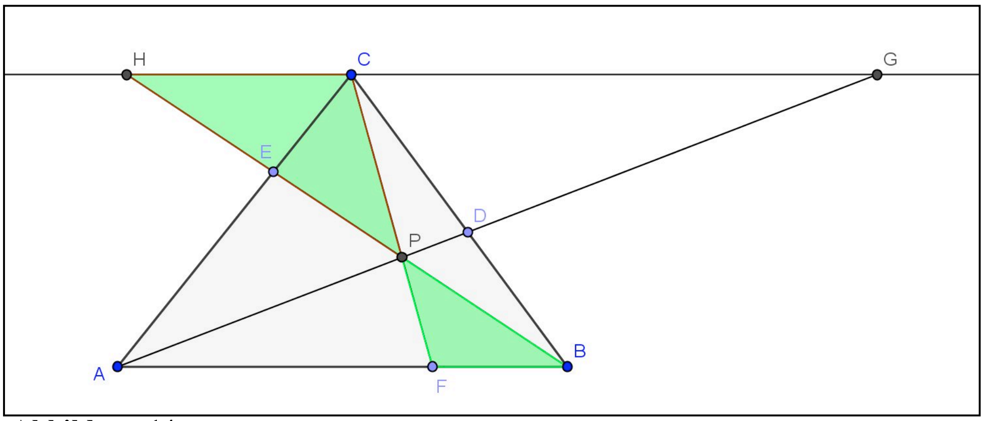



**Abbildung 14**

4. $\Delta CGP \sim \Delta FAP$

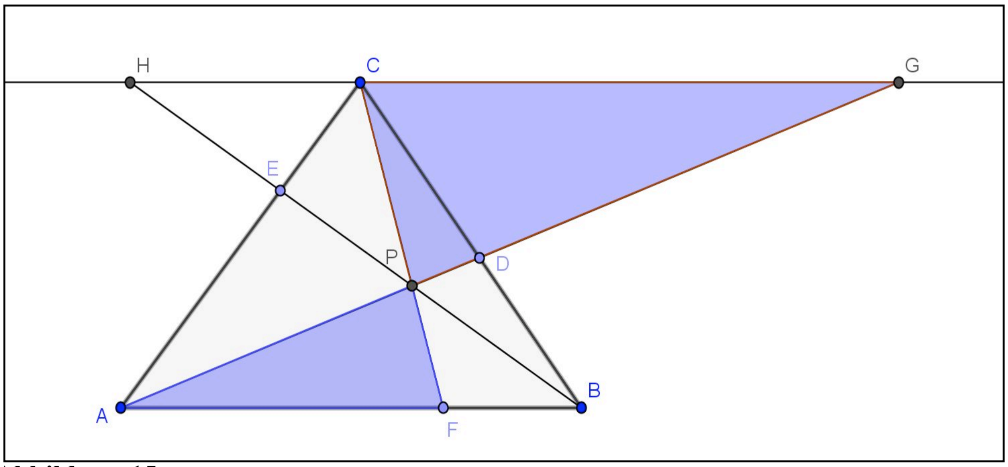



**Abbildung 15**

Mit Hilfe der Formeln (*), (**) und (***) lässt sich nun die Behauptung beweisen:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} * \frac{\overline{AB}}{\overline{CG}} * \frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} = 1$$

## *3.5 Die Umkehrung des Satzes von Ceva*

Genügen drei Ecktransversalen der Gleichung

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

so schneiden sie sich in einem Punkt.

**Beweis:**

Wir nehmen zuerst an, dass sich die ersten beiden Ecktransversalen *AD* und *CF* im Punkt *P* schneiden und dass die dritte Ecktransversale *CE'* durch diesen Punkt verläuft.

Mit Hilfe des Satzes von Ceva gilt damit:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} = 1$$

Da wir aber davon ausgegangen sind, dass

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}}$$

gilt, folgt:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} * \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} * \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}}$$

Damit fallen E' und E zusammen und somit wurde bewiesen, dass sich die drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden. Analog gilt dies auch für andere Punkte.

## *3.6 Beweis des Satzes von Ceva mit Hilfe von Flächeninhalten*

Um den Satz von Ceva zu beweisen, erinnern wir uns daran, dass die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe proportional zu den Grundseiten sind. Dieser Sachverhalt soll an dieser Stelle nicht bewiesen werden.

Mit Hilfe von Abbildung … gilt damit:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{(ARC)}{(RBC)} = \frac{(ARP)}{(RBP)} = \frac{(ARC)-(ARP)}{(RBC)-(RBP)} = \frac{(APC)}{(PBC)}$$

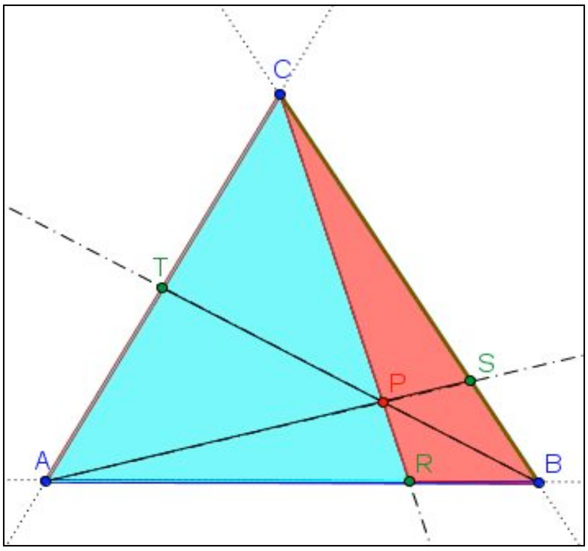



**Abbildung 16**

Analog erhält man:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} = \frac{(ABP)}{(APC)}$$

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = \frac{(PBC)}{(ABP)}$$

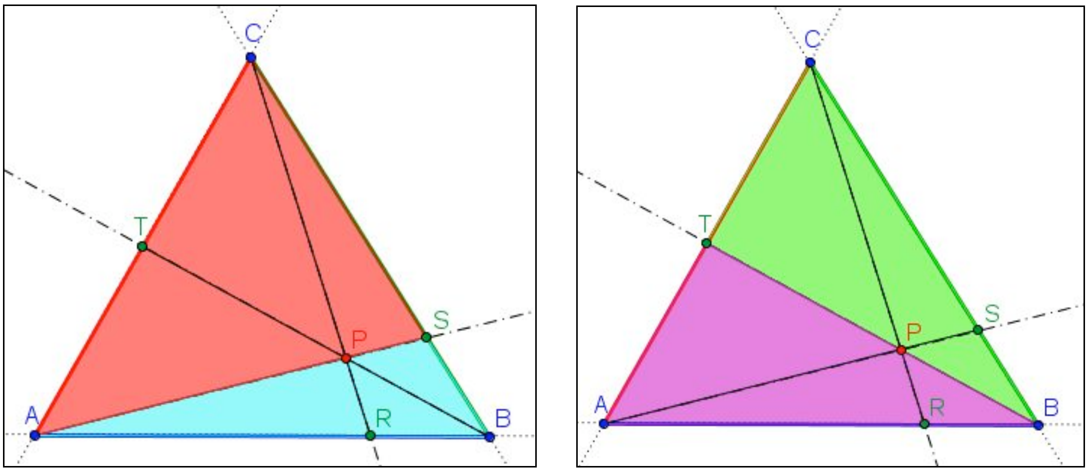



**Abbildung 17**

Multiplizieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} * \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} * \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = \frac{(APC)}{(PBC)} * \frac{(ABP)}{(APC)} * \frac{(PBC)}{(ABP)} = 1$$

q.e.d.

## 3.7 *Anwendungen des Satzes*

### 3.7.1 Die Höhen im Dreieck

Die Ecktransversalen *AD, BE* und *CF* (s. Abb. 18), die jeweils senkrecht auf den Seiten *BC*, *CA* und *AB* stehen, nennt man die Höhen des Dreiecks.

Aus der Umkehrung des Satzes von Ceva (s. Kap 3.5) folgt, dass sich alle Höhen in einem Punkt schneiden. Diesen Punkt (in Abbildung 18 ist das der Punkt H) nennt man Höhenschnittpunkt.

Die Punkte *D, E* und *F* heißen Fußpunkte (oder Lotfußpunkte) der Höhen.

Verbindet man sie paarweise, so erhält man das Dreieck $\Delta DEF$, das sogenannte Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks $\Delta ABC$ *(s. Abb. 18).*

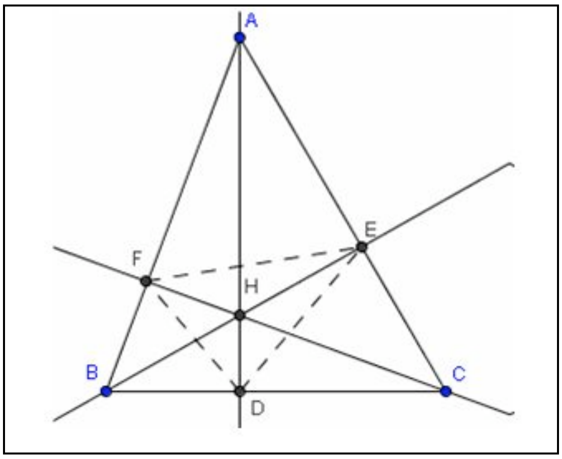



**Abbildung 18**

### 3.7.1 Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks

Mit Hilfe der Umkehrungs des Satzes von Ceva (Kap. 3.5), gilt, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden müssen. Den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks (in Abbildung 19 ist das der Punkt G) nennt man Schwerpunkt des Dreiecks. Würde man ein Dreieck aus einem Material gleichmäßiger Dichte und Dicke ausschneiden, so befände sich das Dreieck im Gleichgewicht, wenn man es in diesem Schwerpunkt aufhängen würde. Diesen Punkt nennt man also zu Recht Schwerpunkt des Dreiecks.

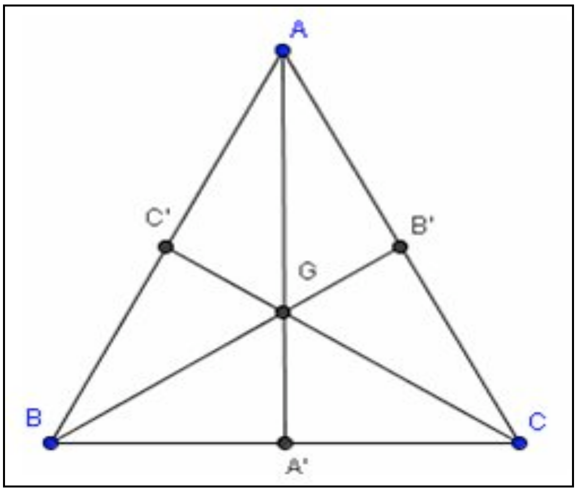


**Abbildung 19**

## 4. Zusammenhang des Satzes von Ceva und des Satzes von Menelaos

Wir fassen noch einmal zusammen:

Der Satz von Ceva ist ein Kriterium für den Schnitt von Geraden (Diese Umkehrung des Satzes von Ceva wird häufig in der Dreiecksgeometrie für Beweise aus dem Themenbereich „Merkwürdige Punkte im Dreieck“ verwendet. Der Satz von Menelaos ist dagegen ein Kriterium für Kollinearität. Um den Gegensatz dieser beider Sätzen herauszufinden, schreiben wir erstens die Gleichung von Menelaos in der Form

$$\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = -1$$

und betrachten folgende vier Abbildungen:

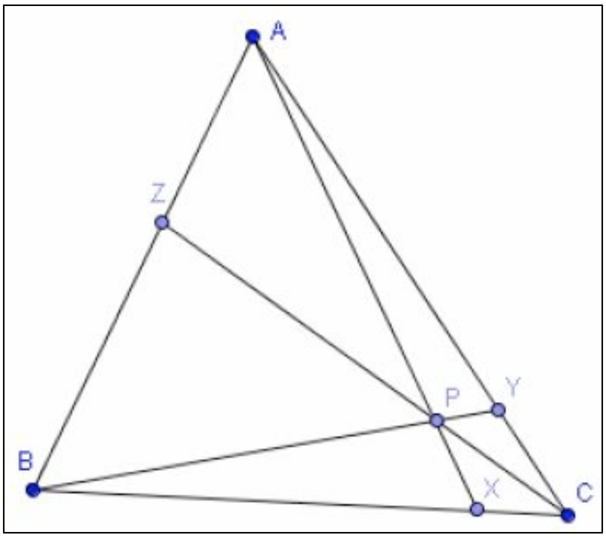


**Abbildung 20**

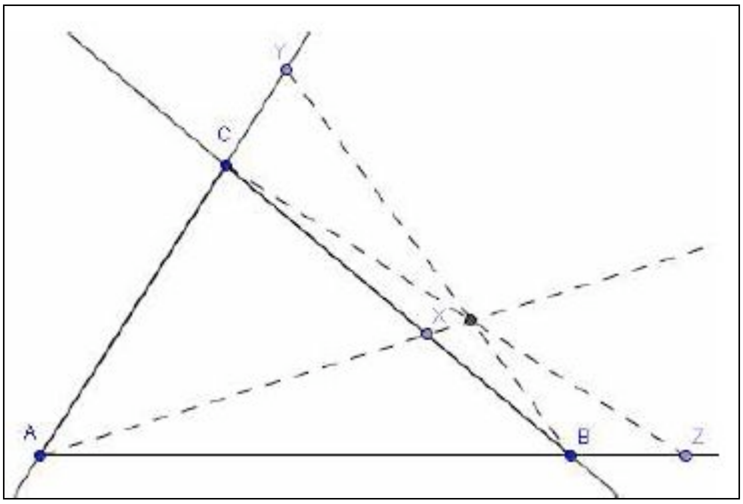


**Abbildung 21**

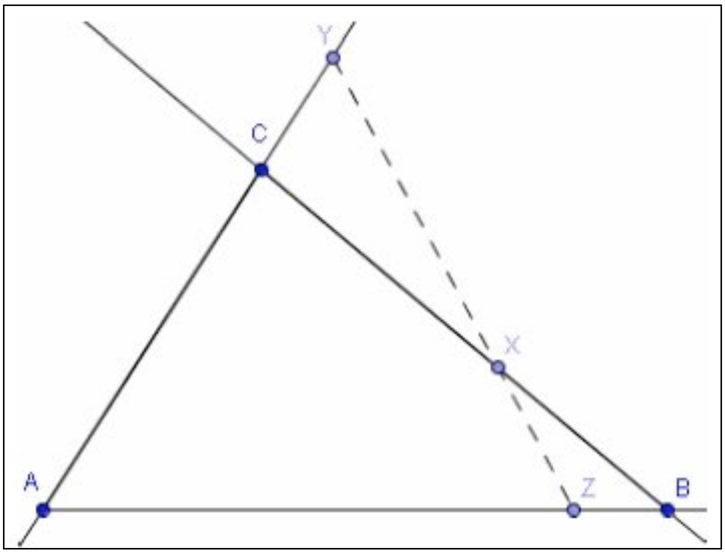


**Abbildung 22**

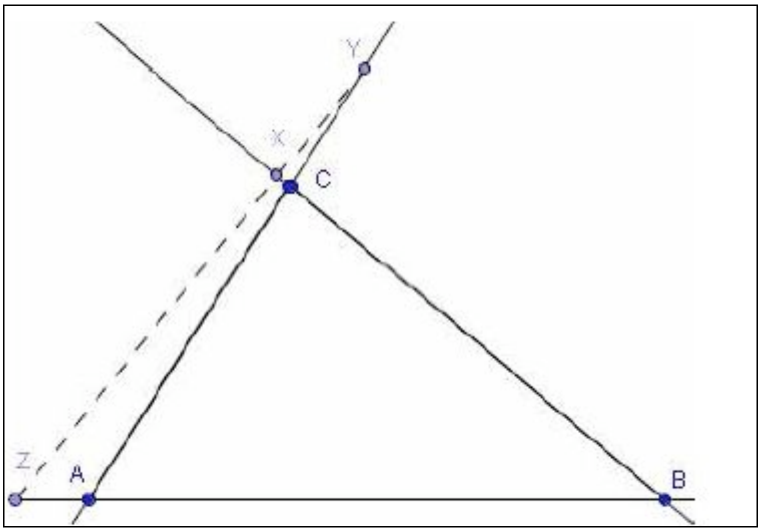


**Abbildung 23**

In Abbildung 20 ist der Satz von Ceva dargestellt, bei der alle drei Punkte auf den Seiten des Dreiecks liegen.
In Abbildung 21 wird ebenfalls der Satz von Ceva dargestellt, nur liegen in diesem Fall zwei Punkte auf Verlängerungen von Seiten und der dritte Punkt auf der Dreieckseite.
In Abbildung 22 wird der Satz von Menelaos dargestellt: Zwei Punkte liegen auf zwei Dreiecksseiten und ein Punkt auf einer Verlängerung einer Dreiecksseite.
In Abbildung 23 ist der Satz von Menelaos dargestellt: Die drei Punkte liegen alle auf Verlängerungen von Seiten des Dreiecks.
Wir wollen nun den Satz von Ceva mit Hilfe des Satzes von Menelaos beweisen und umgekehrt.

## *4.1 Beweis des Satzes von Ceva mit Hilfe von Menelaos.*

Gegeben:
Für gehen davon aus, dass der Satz von Menelaos und sein Kehrsatz gelten. Weiterhin nehmen wir an, dass es drei Ecktransversalen gibt, die sich in einem Punkt schneiden. (Bezug zu Abbildung 20)
Zu zeigen ist nun, dass der Satz von Ceva gilt. Genauer, dass die Gleichung

$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1$ gilt.

Zuerst wenden wir den Satz von Menelaos auf die Dreiecke ΔACZ (mit der Gerade BPY) und ΔBCZ (mit der Gerade APX) an:

ΔACZ: $\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CP}{PZ} \cdot \frac{ZB}{BA} = -1$ und ΔBCZ: $\frac{ZP}{PC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BA}{AZ} = -1$

Wir multiplizieren diese beiden Gleichungen mit einander und erhalten:

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CP}{PZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{ZP}{PC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BA}{AZ} = \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1.$$

Genau diese Gleichung war zu zeigen.
q.e.d.

## 4.2 *Beweise des Satzes von Menelaos mit Ceva*

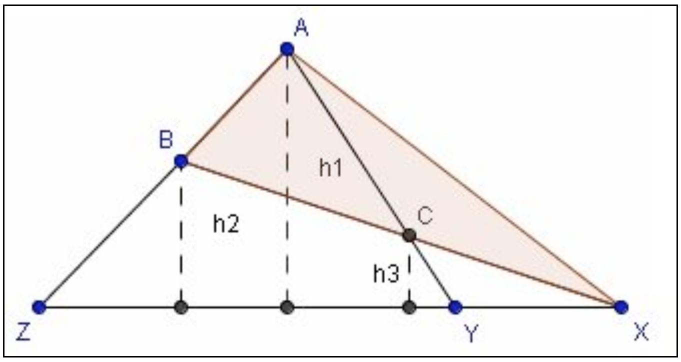


**Abbildung 24**

Wir nehmen an, dass der Satz von Ceva gilt, und die Punkte X, Y und Z (s. Abb. 24) kollinear sind.

Satz von Ceva kann im Dreieck ΔABC angewendet werden:

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1 \qquad (1)$$

Mit dem wichtigen Satz, dass Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe proportional zu den Grundseiten sind, folgt:

$$\frac{AP}{PX} = \frac{(APY)}{(XPY)}.$$

Weiterhin erhalten wir mit derselben Methode:

$$\frac{AP}{PX} = \frac{(APY)}{(XPY)} = \frac{(ABP)}{(PBX)} = (ABP) - (AYP)$$

Den letzten Ausdruck erweitern wir mit (BCY). Den Sinn werden wir gleich verstehen:

$$\frac{(ABY)}{(YBX)} \cdot \frac{(BCY)}{(BCY)} = \frac{(BCY)}{(YBX)} \cdot \frac{(ABY)}{(BCY)} = \frac{BC}{BX} \cdot \frac{AY}{YC}$$

Also gilt:

$$\frac{AP}{PX} = \frac{BX}{BC} \cdot \frac{AY}{YC}$$

$$\frac{BC}{BX} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{PX}{AP} = 1$$

Mit Hilfe von Gleichung (1) erhalten wir:

$$\frac{BC}{NX} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{XC}{CB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{XC}{BX} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{BZ}{ZA} = -1$$

Damit ist der Satz von Menelaus bewiesen.

q.e.d.