

# 2008

Jens Scherdin  
Andreas Meyburg

Universität Bremen  
Juni 2008

## Der Satz von Gérard Desargues

Veranstaltung: Geometrie

Seminarleiter: Dr. Reimund Albers

Bearbeiter: Andreas Meyburg, Matrikel-Nr.: 2172110  
[Andreas.meyburg@uni-bremen.de](mailto:Andreas.meyburg@uni-bremen.de)

Jens Scherdin, Matrikel-Nr.: 2186123  
[Jens.scherdin@nord-com.net](mailto:Jens.scherdin@nord-com.net)

Universität Bremen, Juni 2008

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract .....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Der Satz von Desargues .....</b>	<b>5</b>
	<b>3.1 Projektive Form.....</b>	<b>7</b>
	<b>3.2 Affine Form.....</b>	<b>8</b>
	<b>3.3 Allgemein.....</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Der Beweis des Satzes von Desargues .....</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Satz von Desargues im dreidimensionalen Raum.....</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Anhang.....</b>	<b>19</b>

---

## 1 Abstract

Nach einer kurzen historischen Einleitung wird der Satz von Desargues anhand von Graphiken schrittweise anschaulich erläutert und im Anschluss daran mit dem Satz des Menelaos (genauer: dem Umkehrsatz von Menelaos) bewiesen.

Das Wissen über den Satz des Menelaos und dessen Beweisführung werden vorausgesetzt und sind deshalb nicht Gegenstand dieser Ausarbeitung. Für weiter Interessierte sei auf das Literaturverzeichnis am Ende dieses Textes verwiesen.

## 2 Einleitung



Die geometrische Theorie der Perspektive (genauer: der Malerei von Gemälden mit perspektivischer Wirkung) wurde erstmals von Filippo Brunelleschi (1377-1446) angewendet, einem Malerarchitekten, der auch die achteckige Kuppel des Doms in Florenz und den heute, sich ebenfalls in Florenz befindlichen und mehrere Museen beinhalteten Pitti-Palast entwarf.

In diesem als „Zentralperspektive“, oder auch „Fluchtpunktperspektive“ bezeichneten Verfahren werden raumparallele Kanten nicht abbildungsparallel dargestellt, sondern sie vereinigen sich optisch in einem scheinbaren, gedachten zentralen Punkt, dem sog. Fluchtpunkt. Der auf der Horizontlinie liegende Fluchtpunkt lässt sich über die Schnittstelle finden, die durch die Verlängerung der in der Realität parallel liegenden Objektkanten entsteht.

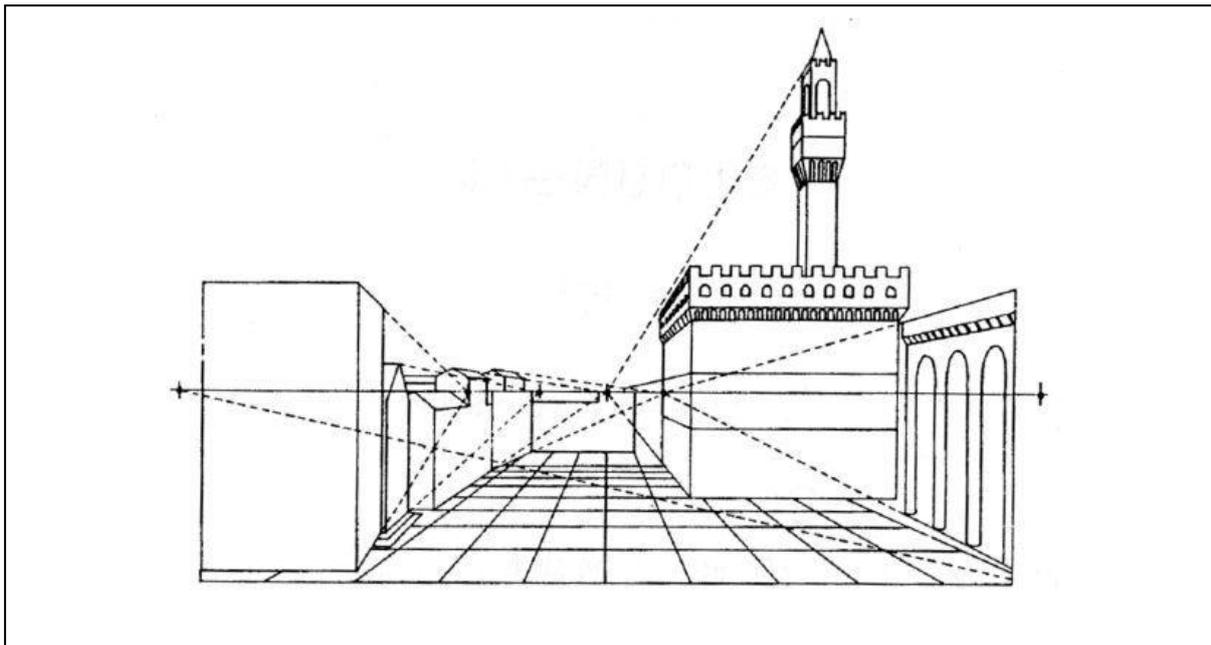
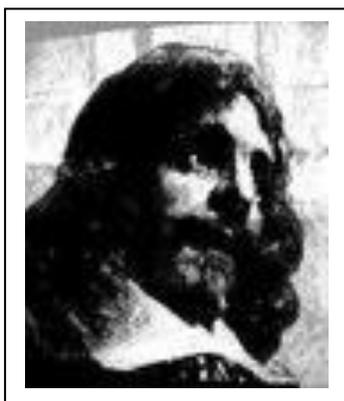


Abbildung 2-2-1: Zentralperspektive

Die Zentralperspektive ist die einfachste Form der Perspektive und richtet die gezeichneten Objekte auf diesen Fluchtpunkt hin aus. Auch wenn durch unterschiedlich verlaufende Objektkanten mehrere Fluchtpunkte entstehen, wie etwa bei der Darstellung eines Hauses, liegen diese dann alle auf einer Horizontlinie. Die dem Betrachter zugewandten Flächen des Objektes sind bildparallel, während die in die Tiefe des Raumes führenden Raumkanten sich scheinbar in einem Fluchtpunkt am Horizont vereinigen.



Diese Theorie der Perspektive wurde später von dem französischen Architekten und Mathematiker Gérard Desargues (1591-1661) wieder aufgegriffen. Sein "Zwei-Dreiecke-Satz", letztendlich als „Satz von Desargues“ bekannt, erlangte eine ähnliche Bedeutung wie beispielsweise der Satz von Menelaos. Auf diesen Satz werden wir noch näher eingehen, denn wir werden den Satz von Desargues mit Hilfe des Satzes von Menelaos, genauer mit dessen Umkehrsatz, geometrisch beweisen. Zur graphischen Unterstützung kommt hierbei das dynamische Mathematik-Geometrieprogramm GeoGebra<sup>1</sup> zur Anwendung, mit dessen Hilfe auch die Diagramme in diesem Referat entstanden sind.

---

<sup>1</sup> siehe [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

---

### 3 Der Satz von Desargues

Um den Satz von Desargues besser zu verstehen, erläutern wir an dieser Stelle vorab einige wesentliche Zusammenhänge:

Wenn sich zwei geometrisch ähnliche Figuren (in unserem Fall zwei Dreiecke) aufgrund der Lage ihrer Eckpunkte und ihrer durchlaufenden Verbindungsgeraden so aufeinander beziehen lassen, dass alle drei Verbindungsgeraden durch einen weiteren, zentralen Punkt  $Z$  gehen, dann heißt diese geometrische Figurenkonstellation perspektiv bezüglich dieses zentralen Punktes.

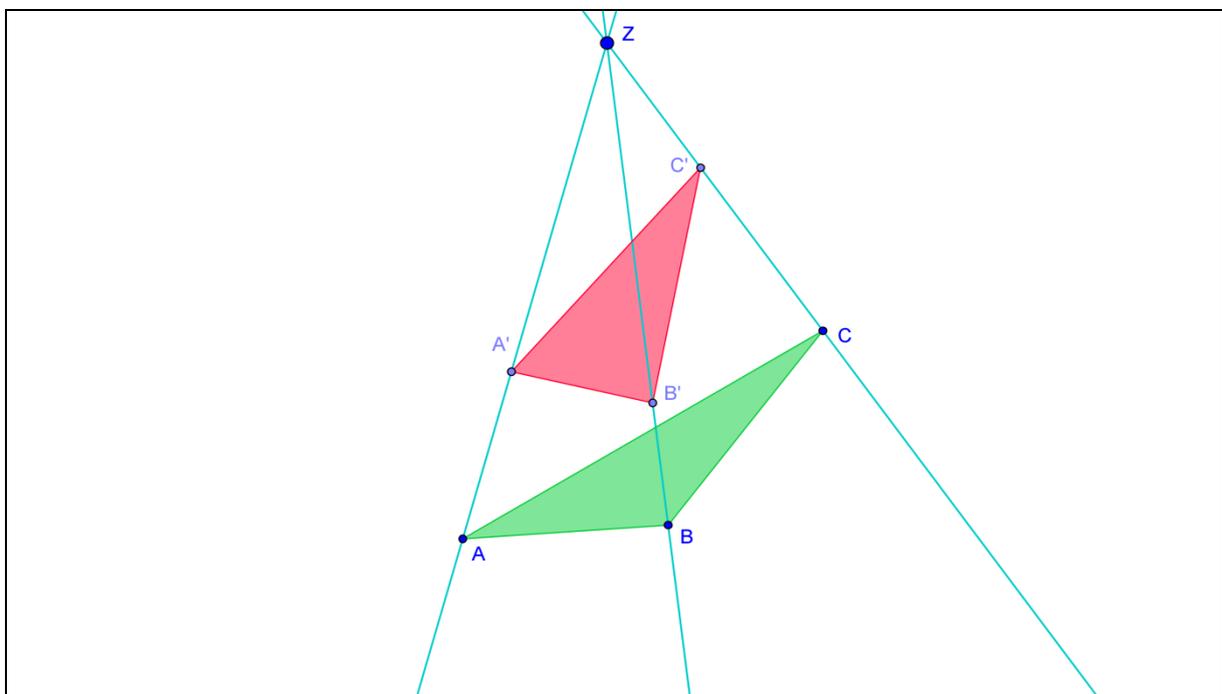


Abbildung 3-1: 2 Dreiecke perspektiv bezüglich eines Punktes  $Z$

Das Dreieck  $\triangle A'B'C'$  entsteht als Bild von  $\triangle ABC$  unter der Streckung mit dem Punkt  $Z$ , die  $A$  auf  $A'$ ,  $B$  auf  $B'$  und  $C$  auf  $C'$  abbildet.

Ist weiterhin die Bedingung erfüllt, dass sich je zwei zusammengehörige, verlängerte Geraden zweier korrespondierender Objektseiten jeweils in Punkten schneiden, die dann alle auf einer Geraden  $g$  liegen, so heißen die beiden betrachteten Figuren perspektiv bezüglich dieser Geraden.

---

Im Sinne der projektiven Geometrie besagt der „Zwei-Dreiecke-Satz“ von Desargues, dass zwei bezüglich eines Punktes perspektive Dreiecke gleichzeitig auch perspektiv bezüglich einer Geraden sind.

**Formulierung:**

Sind zwei Dreiecke perspektiv bezüglich eines Punktes  $Z$  und schneiden sich die Paare entsprechender Seiten, dann liegen die drei Schnittpunkte  $U$ ,  $V$ , und  $W$  auf einer Geraden  $g$ .

Die Schnittpunkte der Strecken durch  $BC$  und  $B'C'$ , der Strecke durch  $AC$  und  $A'C'$  und der Strecke durch  $AB$  und  $A'B'$  werden mit  $U$ ,  $V$  und  $W$  bezeichnet.

Die Verbindungslinie  $a$  geht dabei durch das Punktepaar  $AA'$ , Verbindungslinie  $b$  durch das Punktepaar  $BB'$  und entsprechend die Verbindungslinie  $c$  durch das Punktepaar  $CC'$ . Alle drei Verbindungslinien müssen sich in einem Punkt  $Z$  schneiden, damit der Satz von Desargues Gültigkeit hat.

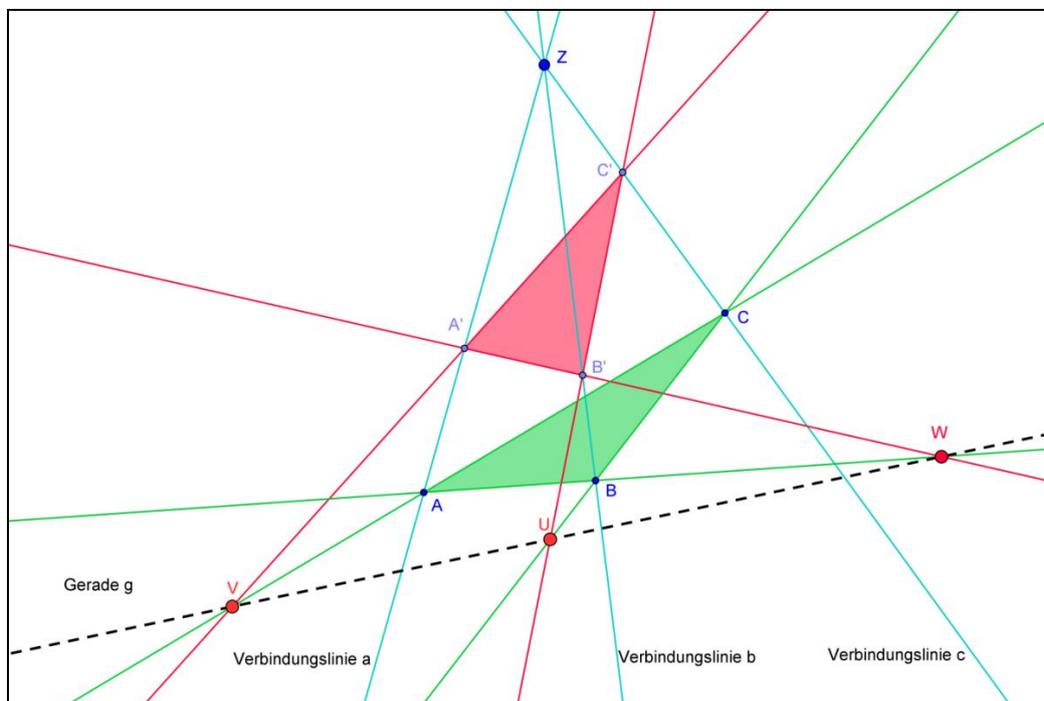


Abbildung 3-2: 2 Dreiecke perspektiv bezüglich eines zentralen Punktes  $Z$  und einer Geraden  $g$

---

**Voraussetzung:**

Gegeben sind die beiden Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  mit  $AA' \cap BB' \cap CC' = \text{Punkt } Z$ .

Die verlängerten grünen und roten Seiten der beiden korrespondierender Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  werden dabei definiert als:

$AB \cap A'B' = \text{Punkt } W$ ,  $BC \cap B'C' = \text{Punkt } U$  und  $CA \cap C'A' = \text{Punkt } V$

Die Punkte  $U, V$  und  $W$  liegen gemeinsam auf einer Geraden  $g$ .

### 3.1 Projektive Form

**Satz von Desargues:**

Liegen die Schnittpunkte  $U, V, W$  der entsprechend verlängerten grünen und roten Seiten zweier korrespondierender Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  auf einer Geraden  $g$ , so gehen die blauen Verbindungslinien  $a, b, c$  der entsprechenden, korrespondierenden Eckpunkten beider Dreiecke durch den Punkt  $Z$ .

**Umkehrsatz vom Satz von Desargues:**

Umgekehrt schneiden sich die blauen Verbindungslinien  $a, b, c$  entsprechender Ecken zweier Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  genau dann, wenn die Schnittpunkte  $U, V, W$  entsprechend verlängerten grünen und roten Seiten der beiden korrespondierenden Dreiecke auf einer Geraden  $g$  liegen.

---

## 3.2 Affine Form

### 1. Fall

Der erste Fall existiert, wenn bei einer Konfiguration der gemeinsame (zentrale) Punkt  $Z$  direkt auf einer der grünen oder roten Seiten oder deren Verlängerungslinien der beiden korrespondierenden Dreiecke liegt, was automatisch zu einer Überlagerung der betreffenden Verbindungsgeraden und ihres korrespondierenden Pendant führt. In diesem Fall spricht man dann auch vom „Kleinen Satz von Desargues“.

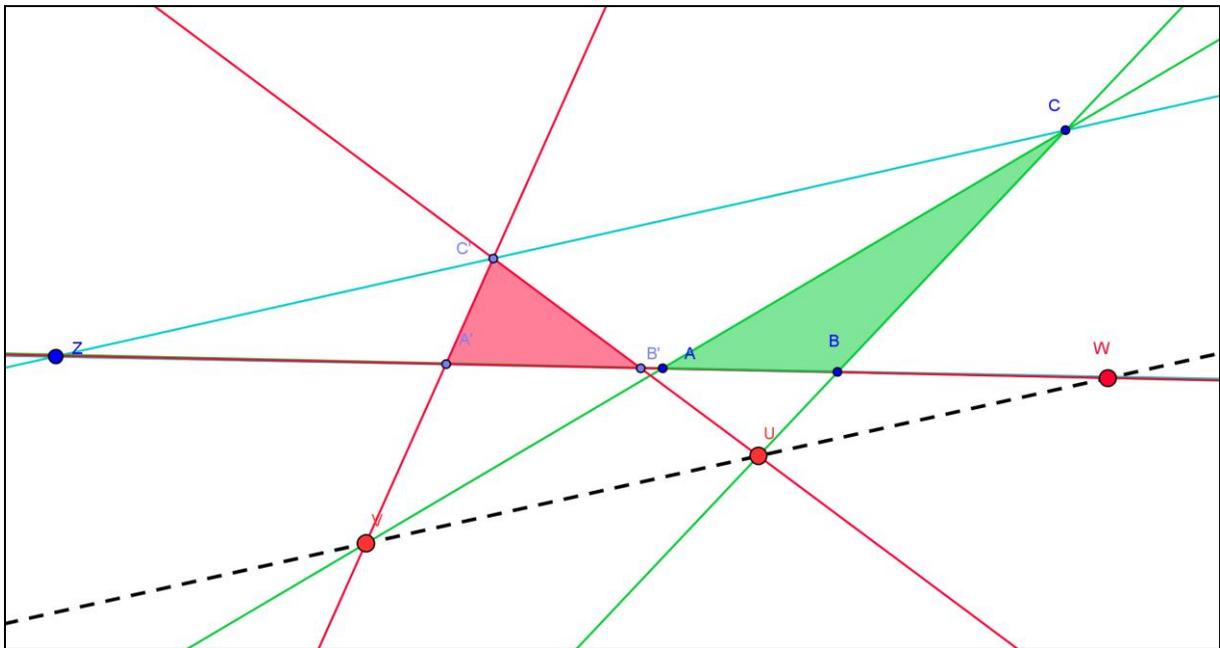


Abbildung 3-3: Kleiner Satz von Desargues

## 2. Fall

Wenn zwei Dreiecksseiten parallel verlaufen und nicht übereinander liegen, so verläuft die Gerade  $g$  auch parallel zu den parallelen Seiten der beiden Dreiecke.

$A'C' \parallel AC = \text{Schnittpunkt } V$

$B'C' \parallel BC = \text{Schnittpunkt } U$

$A'B' \parallel AB \Rightarrow \text{Gerade } g \parallel AB \parallel A'B'$

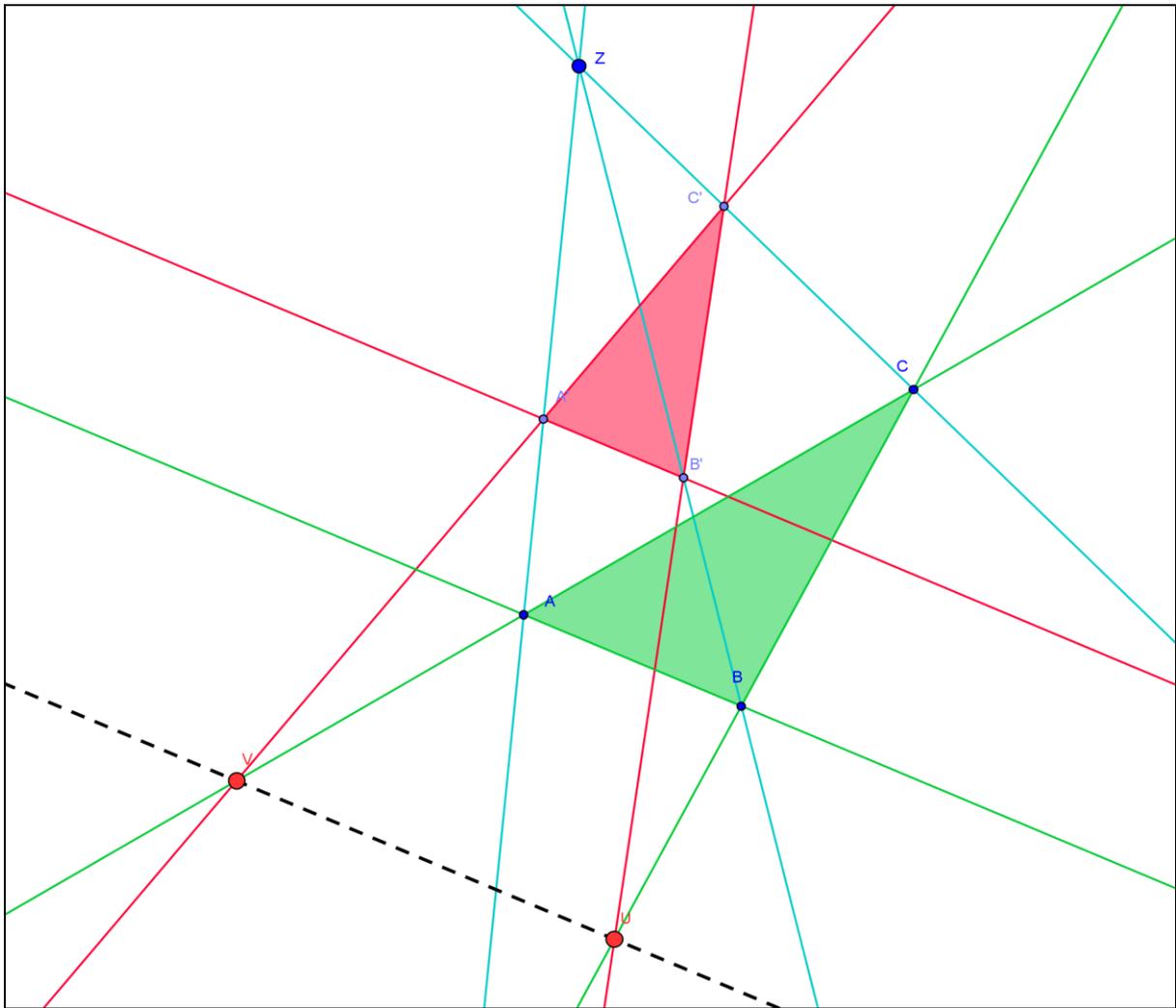


Abbildung 3-4: Zwei korrespondierende Seiten parallel zueinander, damit auch die Gerade  $g$  parallel dazu

### 3. Fall

Sind zwei Seiten der jeweilig korrespondierenden Dreiecke parallel, so sind damit automatisch auch die letzten Seiten der Dreiecke parallel.

Der Fall, dass nur vier korrespondierende Seiten parallel laufen, existiert nicht.

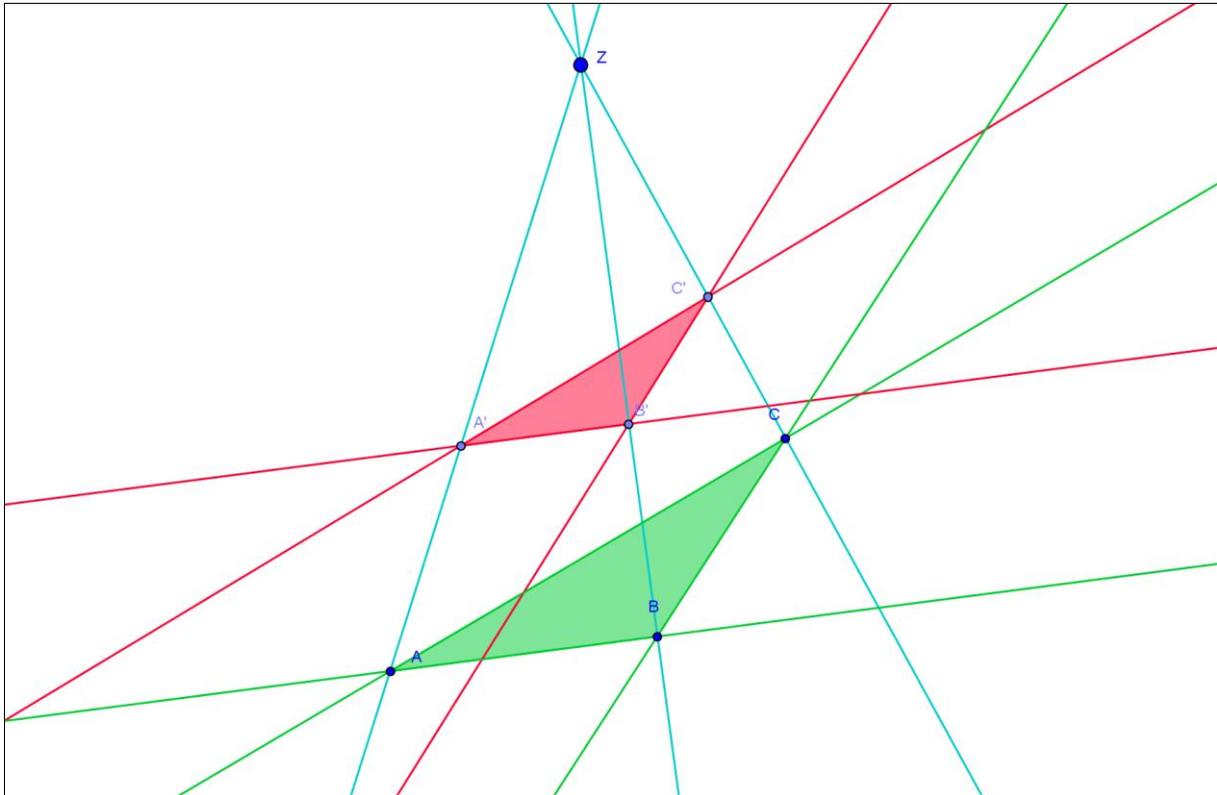


Abbildung 3-5: Alle korrespondierenden Seiten der beiden Dreiecke parallel zueinander

$$A'C' \parallel AC$$

$$B'C' \parallel BC$$

$$A'B' \parallel AB$$

---

### 3.3 Allgemein

Im Allgemeinen kann man festhalten, dass in mindestens dreidimensionalen, affinen und projektiven Räumen der Satz von Desargues immer gilt, wobei der Beweis dafür relativ einfach ist.

Anzumerken ist allerdings an dieser Stelle, dass auch affine und projektive Ebenen existieren, in denen der Satz von Desargues nicht gilt, etwa die Moulton-Ebene, die in den Büchern von Pickert und Hughes-Piper ausführlich beschrieben ist.

#### **Anmerkung:**

Man kann die Sonderfälle mit dem allgemeinen Fall vereinheitlichen, wenn man die Eigenschaft „sind parallel“ interpretiert mit „haben im Unendlichen einen Schnittpunkt“. Dann gibt es immer die Schnittpunkte  $U$ ,  $V$  und  $W$  (die z.T. „im Unendlichen liegen“). Genau dieser Schritt wird in der projektiven Geometrie getan, in der axiomatisch gefordert wird, dass zu zwei Geraden immer ein Schnittpunkt existiert.

## 4 Der Beweis des Satzes von Desargues

Wie anfangs erwähnt, spielt beim Beweis des Satzes von Desargues der Satz des Menelaos eine bedeutende Rolle, genauer gesagt: dessen Umkehrsatz. Das Verblüffende an beiden Sätzen ist, dass man sich die Ähnlichkeiten beider Sätze bei der Beweisführung zu Nutze macht.

Während der Satz von Desargues genau dann gilt, wenn die drei in unserem Beispiel benannten Schnittpunkte  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , gebildet aus den verlängerten Seitenkanten der zwei in unserem Beispiel korrespondierenden Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$ , alle auf einer Geraden  $g$  liegen, verlangt der Umkehrsatz des Menelaos, dass eine ein Dreieck durchquerende Gerade die Seitenkanten des betrachteten Dreiecks schneidet. Dabei wird die dritte, originär nicht geschnittene Dreiecksseite entsprechend so verlängert, dass auch sie diese Gerade schneidet. Wenn jetzt alle drei Schnittpunkte auf der Geraden liegen und die Multiplikation der Verhältnisse der geteilten Dreiecksseitenkanten genau den Wert 1 ergibt, ist der Umkehrsatz des Menelaos erfüllt.

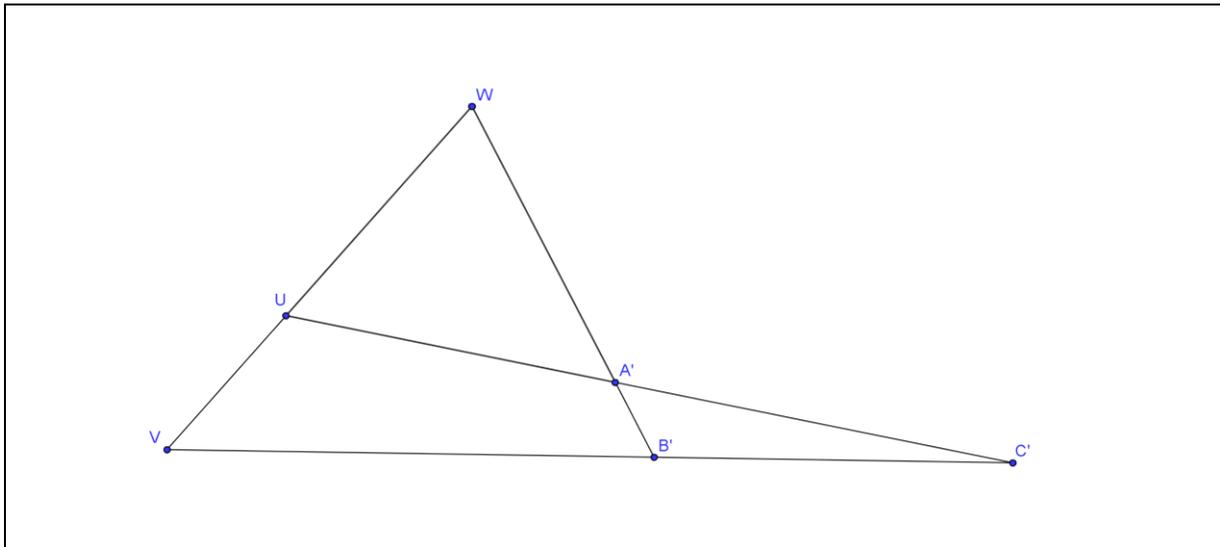


Abbildung 4-1: Satz des Menelaos

In unserem Beispiel verläuft diese „Menelaos“-Gerade durch die Punkte U, A', C' und das neue „Menelaos“-Dreieck definiert sich als:  $\Delta WVB'$ . Ein Teil der ursprünglichen „Desargues“-Gerade stellt dabei die längere Seite des neuen „Menelaos“-Dreiecks  $\Delta WVB'$  dar, wobei diese Seite des Dreiecks dabei geeignet verlängert wird, um den dritten Schnittpunkt mit der neuen „Menelaos“-Gerade zu erzeugen. Hingegen stellt die längste Seite unseres ursprünglich betrachteten, roten Dreiecks  $\Delta A'B'C'$  jetzt ein Teil der neuen „Menelaos“-Gerade dar. Somit können die anfangs genannten Ähnlichkeiten der beiden Sätze auch graphisch eindeutig benannt werden.

Nach dem Umkehrsatz des Menelaos gilt in unserem Beispiel folgende Verhältnisgleichung:

$$\frac{\overline{B'W}}{\overline{A'W}} * \frac{\overline{A'U}}{\overline{C'U}} * \frac{\overline{C'V}}{\overline{B'V}} = 1$$

Ausgehend vom zentralen Punkt Z wird jetzt der Beweis durch die dreimalige Anwendung des Umkehrsatzes des Menelaos hergeleitet mit dem Ziel, alle existierenden Punkte unserer kompletten geometrischen Figur der beiden korrespondierenden Dreiecke in Abhängigkeit zu einander zu beschreiben (genauer: zu erreichen). Die insgesamt vier neuen „Menelaos“-Dreiecke werden in unserem Beispiel zur besseren Verdeutlichung farblich hinterlegt dargestellt.

Starten wir den Beweis mit der Anwendung des obigen Satzes bezogen auf die erste mögliche Dreieckskombination für:  $\Delta WBB'$  (Hilfssatz 1):

$$\frac{\overline{B'W}}{\overline{A'W}} * \frac{\overline{A'A}}{\overline{ZA}} * \frac{\overline{ZB}}{\overline{B'B}} = 1$$

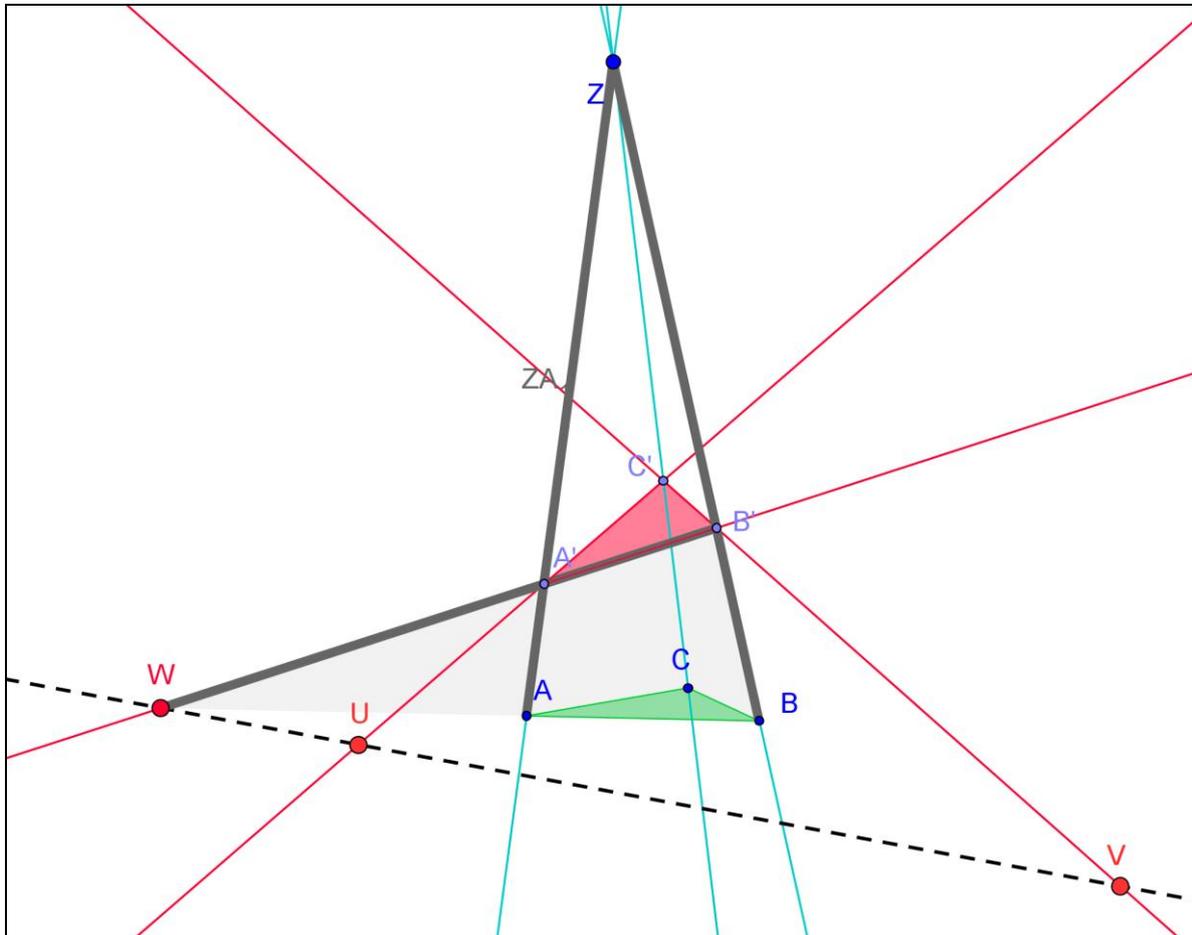


Abbildung 4-2: Hilfssatz 1

Es folgt die zweite Kombinationsmöglichkeit für das Dreieck:  $\Delta UCC'$  (Hilfssatz 2):

$$\frac{\overline{A'U}}{\overline{C'U}} * \frac{\overline{C'C}}{\overline{ZC}} * \frac{\overline{ZA}}{\overline{A'A}} = 1$$

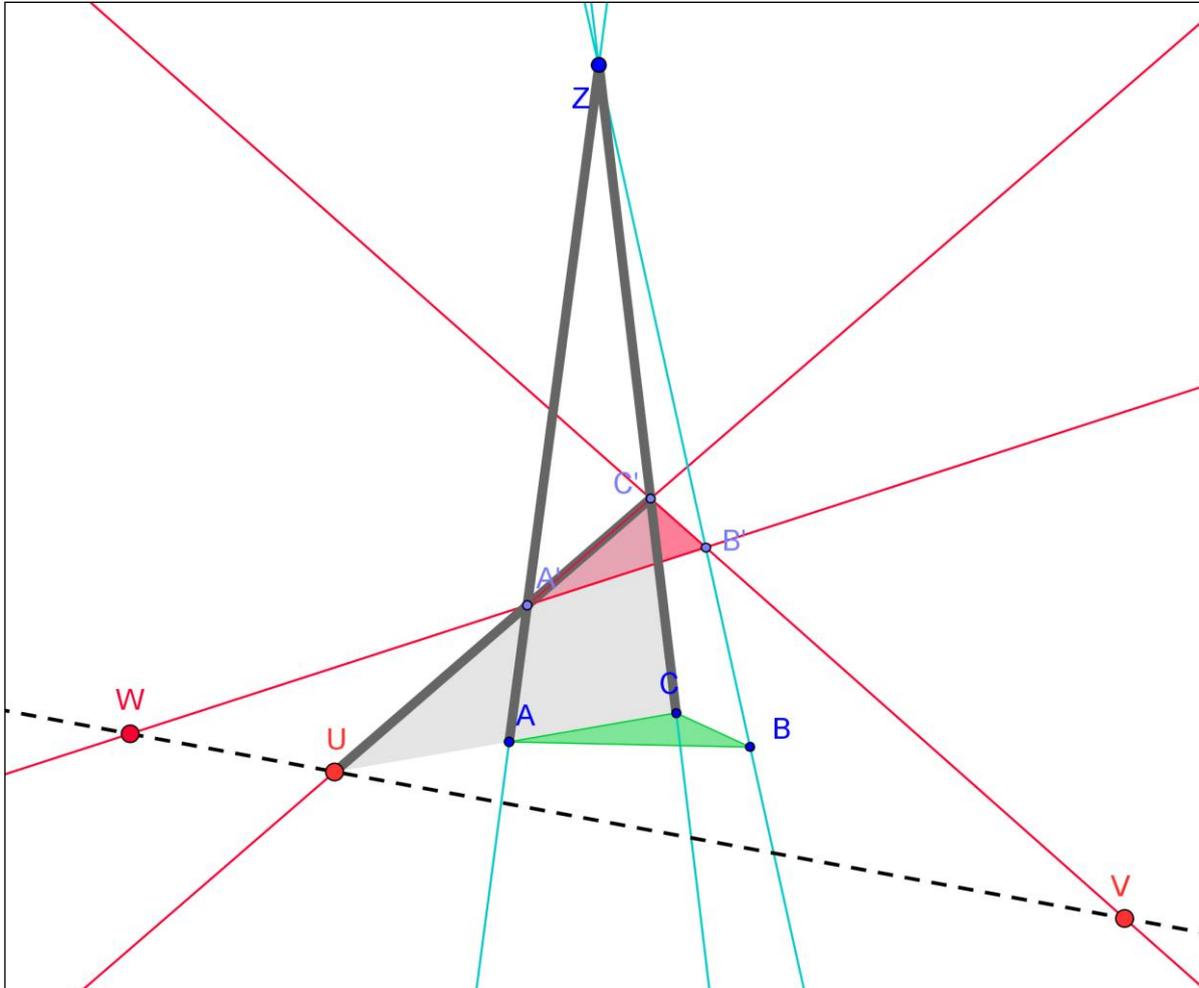


Abbildung 4-3: Hilfssatz 2

Schließlich folgt der dritte und letzte Hilfssatz mit der Kombination des Dreiecks:  $\triangle BVB'$   
(Hilfssatz 3):

$$\frac{\overline{C'V}}{\overline{B'V}} * \frac{\overline{B'B}}{\overline{ZB}} * \frac{\overline{ZC}}{\overline{C'C}} = 1$$

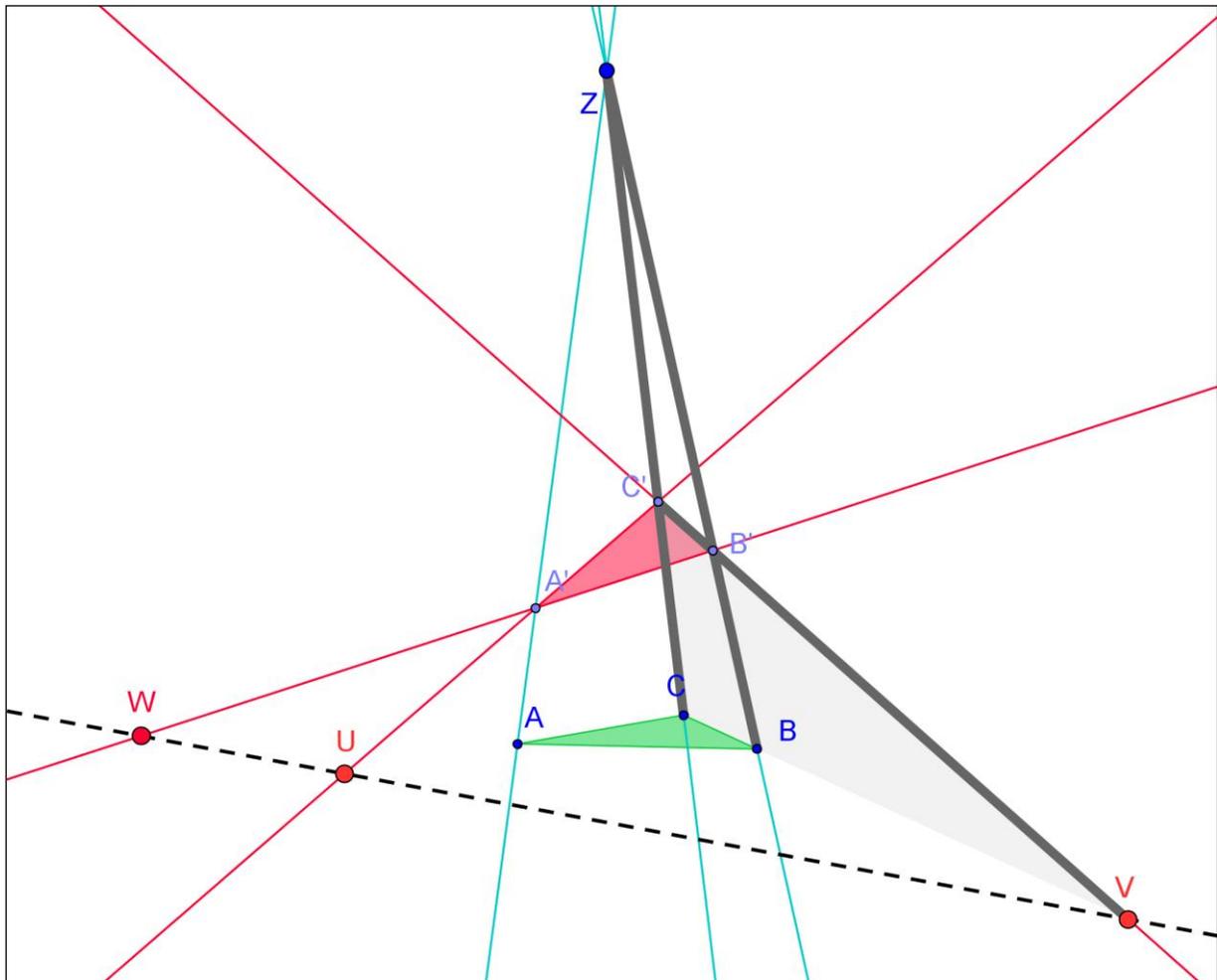


Abbildung 4-4: Hilfssatz 3

Nachdem nun alle Punkte unserer betrachteten geometrischen Figur jeweils mit dem Menelaos-Umkehrsatz bewiesen worden sind, kann man die drei Hilfssätze zu einem Beweis zusammenführen, in dem man einfach die jeweils linken und rechten Seiten der drei Gleichungen miteinander multipliziert.

Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{\overline{B'W}}{\overline{A'W}} * \frac{\overline{A'A}}{\overline{ZA}} * \frac{\overline{ZB}}{\overline{B'B}} * \frac{\overline{A'U}}{\overline{C'U}} * \frac{\overline{C'C}}{\overline{ZC}} * \frac{\overline{ZA}}{\overline{A'A}} * \frac{\overline{C'V}}{\overline{B'V}} * \frac{\overline{B'B}}{\overline{ZB}} * \frac{\overline{ZC}}{\overline{C'C}} = 1 * 1 * 1$$

Durch geschicktes Wegkürzen wird jetzt sofort die Gleichung weiter vereinfacht und wir erhalten die anfänglich gestellte Behauptung, die bewiesen werden sollte:

$$\frac{\overline{B'W}}{\overline{A'W}} * \frac{\overline{A'U}}{\overline{C'U}} * \frac{\overline{C'V}}{\overline{B'V}} = 1$$

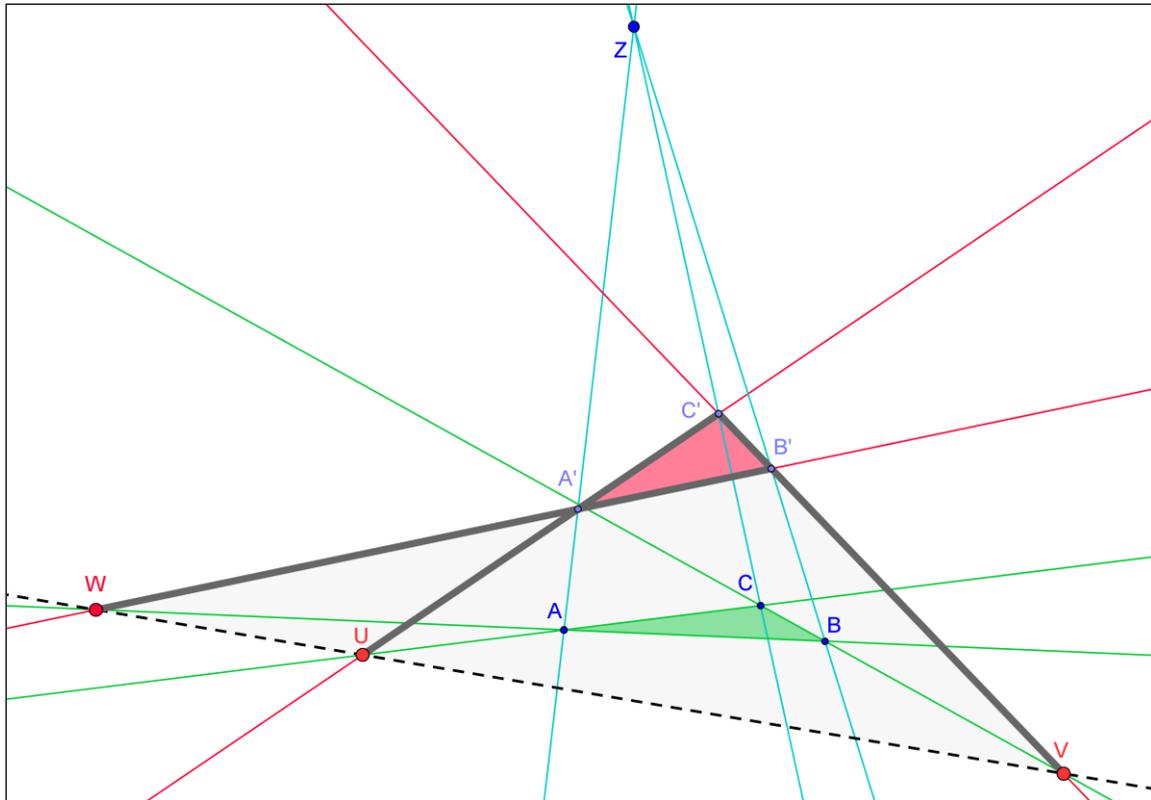


Abbildung 4-5: Beweis des „Satzes von Desargues“ mit dem „Satz von Menelaos“

Somit ist der Satz von Desargues durch die geschickte mehrmalige Anwendung des Umkehrsatzes von Menelaos bewiesen, denn die Punkte  $C'$ ,  $A'$  (und auch  $U$  durch entsprechende Verlängerung der einen roten Dreiecksseite) unseres ursprünglichen roten Dreiecks  $\Delta A'B'C'$  liegen alle auf einer Geraden – der neuen zugehörigen „Menelaos“-Geraden.

---

## 5 Satz von Desargues im dreidimensionalen Raum

Das grüne Dreieck ist die Grundfläche des dreidimensionalen Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C und Z.

Im dreidimensionalen Raum wird der Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, und Z von einer Ebene  $E'$  geschnitten. Das Schnittgebilde ist das rote Dreieck mit den Ecken  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ , welches in der Ebene  $E'$  liegt. Liegen die Eckpunkte A, B, C in der Ebene E, so schneiden sich E und  $E'$  in einer Geraden (Beweis siehe Lineare Algebra).

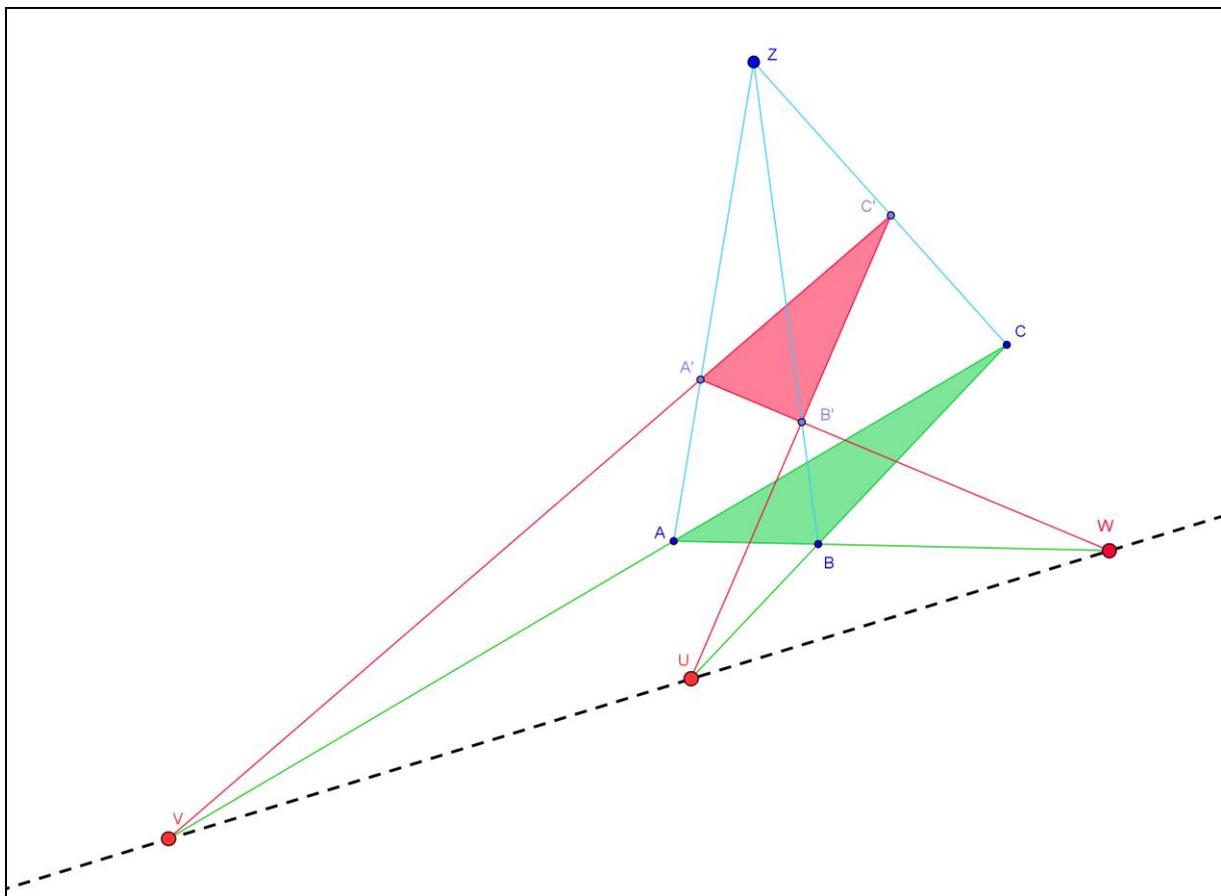


Abbildung 5-1: Satz von Desargues im 3 dimensionalem Raum (Tetraeder)

---

## 6 Literatur

- Lingenberg, Rolf: *Grundlagen der Geometrie I*, Mannheim: Bibliographisches Institut (1969)
- Pickert, Günter: Projektive Ebenen.
- Hughes, Daniel and Piper, Fred: Projective planes.
- Coxeter, H. S. M., und S. L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart, 1983
- W. Götz, *Der verallgemeinerte Schmetterlingssatz*, Praxis der Mathematik 29:6 (1987)
- S. 203-204 in: J. Kratz, *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht*, bsv, 1993
- G. Pickert, *Zum projektiven Beweis des Schmetterlingssatzes*, Praxis der Mathematik 30:3 (1988)
- H. Schaal, *Bemerkungen zum Schmetterlingssatz*, Praxis der Mathematik 30:5 (1988)
- S. 22 in: E. M. Schröder, *Vorlesungen über Geometrie, Bd. 2: Affine und projektive Geometrie*, BI, 1991
- U. Schoenwaelder, *Analytische Geometrie über einem Schiefkörper*, Manuskript (zwei Seiten) zum Beweis des großen allgemeinen affinen Satzes von Desargues.
- E. Sperner, *Einführung in die Analytische Geometrie und Lineare Algebra, Teil 2*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959. S. 15: Die (projektiven) Sätze von Desargues und Pappos

---

## 7 Anhang