Universität Bremen

Thema:

Der Fermatpunkt –
eine Erweiterung der Schulgeometrie

Staatsexamensarbeit Sekundarstufe I

Fachbereich Mathematik / Informatik

Studiengang Mathematik

Referent:	Dr. Reimund Albers
Korreferent:	Dr. Steffen Hahn
Autorin:	Tasja Werner
	Villacher Str. 1
	28359 Bremen

Datum der Abgabe:	21. April 2008

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
Bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
ebd.	Ebenda
e.V.	eingetragener Verein
ges.	gesamt
ggb	GeoGebra-Datei
Hrsg.	Herausgeber
ff.	folgende
S.	Seite
Vgl.	Vergleiche
z.B.	zum Beispiel
z.T.	zum Teil

Einleitung

Arithmetik, Stochastik und Geometrie sind die Themengebiete, die der Senator für Bildung und Wissenschaft in Bremen zur Behandlung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I festgelegt hat[1]. Im Rahmen dieser Examensarbeit wird das Themengebiet der Geometrie näher betrachtet.

Geometrie besteht aus Punkten, Strecken, Flächen und Körpern. Man kann diese geometrischen Objekte mit Zirkel, Lineal und Bleistift konstruieren. Mit dem Satz des Pythagoras kann man die Seiten von rechtwinkligen Dreiecken berechnen. Trigonometrische Sätze dienen der Berechnung von Winkeln.

Ist das alles, was die Geometrie zu bieten hat?

Eine weitere Frage, die eher inhaltlicher Natur ist, richtet sich an Lehrkräfte: Welcher ihrer Schüler kann die Länge $\sqrt{7}$ konstruieren? Die Schulmathematik betrachtet das Themengebiet der Geometrie oft isoliert von Bereichen der Algebra oder der Analysis. Ein Dreieck mit gegebenen Seitenlängen und Winkelgrößen kann jeder Schüler konstruieren. Die Größe einer Weide und das Volumen eines Grabens mit trapezförmigem Schnitt sind ebenso beliebte Aufgabenformate, um Schülern die Geometrie näher zu bringen. Wieder drängt sich die Frage auf:

Ist das alles, was die Geometrie zu bieten hat?

Ziel der vorliegenden Examensarbeit ist, diese Frage mit „Nein!“ zu beantworten. Zunächst ist der Fermatpunkt ein besonderer Punkt im Dreieck, mit Zirkel und Lineal zu konstruieren und damit ein klassisches geometrisches Thema. In der Schulgeometrie wird dem Punkt mit der kleinsten Abstandssumme zu den Eckpunkten eines Dreiecks nicht viel Beachtung geschenkt. Welches Potenzial in der näheren Betrachtung der Problemstellung liegt und wie Schüler, deren mathematische Begabung über das gymnasiale Schulniveau hinaus geht, mit geometrischen Anwendungen gefordert und gefördert werden können, zeigt diese Ausarbeitung.

[1] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 27 ff.

Das erste Kapitel verdeutlicht, welche Anforderungen im bildungstheoretischen Kontext an die Schulmathematik und damit auch an die Geometrie gestellt werden. Die Charakterisierung der Geometrie nach Holland stellt die Ziele eines Mathematikunterrichts mit geometrischem Schwerpunkt vor.

Im Anschluss an eine historische Betrachtung der Problemstellung und seines Namensgebers werden geometrische Sätze bereitgestellt, die für den Beweis des Fermatpunktes von Bedeutung sind. Zum Umfangswinkelsatz und seiner Umkehrung, dem Satz vom Sehnenviereck und dem Satz von Viviani werden Aufgabenvorschläge angeboten, die die vielseitigen und themenübergreifenden Einsatzmöglichkeiten von Geometrie demonstrieren. Durch den Einsatz der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra wird der Aspekt des kreativen und experimentellen Lernens in der Geometrie hervorgehoben.

Der Beweis des Fermatpunktes wird ebenfalls von Einsatzmöglichkeiten in der Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler außerhalb des regulären Mathematikunterrichts begleitet.

In einem abschließenden Fazit wird zusammenfassend dargestellt, in wie weit der Fermatpunkt tatsächlich eine Erweiterung der Schulgeometrie darstellt und was die Geometrie in diesem Kontext leisten kann.

1. Bildungstheoretische Hintergründe

1.1 Mathematik und Schule

In den Jahrgängen 7 bis 10 des Gymnasiums wird an Lehrkräfte die Anforderung gestellt, durch ihren Unterricht vorhandene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ihrer Schüler auszubauen und entsprechend zu fördern. Das erworbene Wissen soll die Lernenden auf die wachsende Verantwortung gegenüber ihrem eigenen Leben und Lernen sowie auf die gymnasiale Oberstufe und den daran anknüpfenden beruflichen Werdegang vorbereiten.

Die Bildungs- und Erziehungsziele sind im Bremischen Schulgesetz (§5) konkret formuliert. In §5.3 heißt es:

> *„Die Schule hat den Auftrag, Basiskompetenzen und Orientierungswissen sowie Problemlösefähigkeiten zu vermitteln, die Leistungsfähigkeit und -bereitschaft von Schülerinnen und Schülern zu fördern und zu fordern und sie zu überlegtem persönlichen, beruflichen und gesellschaftlichen Handeln zu befähigen. […]“* [2]

Die Lern- und Bildungsziele des Bremer Rahmenlehrplans für Mathematik in der Sekundarstufe I werden durch die Ausbildung von Handlungskompetenz durch verschiedene Kompetenzfelder erreicht, deren Zusammenhang Abb. 1 verdeutlicht[3].

Die Förderung der Leistungsfähigkeit und -bereitschaft über den regulären Unterricht hinaus wird durch die Erweiterung des Unterrichtsangebotes für mathematisch besonders begabte und interessierte Schüler erreicht. Durch die Bildung von Grund- und Förderkursen und Projektgruppen wird diesen Schülern zusätzlich zum Schulunterricht die Möglichkeit gegeben, ihre thematisch ausgerichteten Kompetenzen durch spezielle und lokale Förderung weiter auszubauen.

---

[2] Vgl. Bremisches Schulgesetz, 2005, §5.3.
[3] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 8.

Abb. 1: Kompetenzfelder

Bei der Gestaltung des zusätzlichen Lernangebotes ist es sinnvoll, einzelne Kompetenzfelder der Handlungskompetenz in den Vordergrund zu stellen, um inhaltliche Interessen stärker betonen zu können.
Im Sinne der mathematischen Förderung begabter Schüler sind besonders die Sach- und Methodenkompetenzen zu beachten. Der kreative Umgang mit Mathematik beinhaltet den Einsatz von Lösungsstrategien und verschiedenen Lernmethoden in geeigneten Situationen. Von Seiten der Lehrperson sind daher sowohl methodische Instrumente als auch Raum für kreatives und exploratives Lernen bereit zu stellen. Nur so können Schüler ihre Bereitschaft bzw. Fähigkeit, Lernstrategien selbstständig zu erarbeiten, ausbauen.
Inhaltlich orientiert sich die Gestaltung mathematischer Förderung an den Leitlinien[4] des Rahmenplans:

- *Die Fähigkeit, zu modellieren und zu mathematisieren, mathematische Mittel zur Beschreibung und Bewältigung von inner- und außermathematischen Problemstellungen einzusetzen und mathematische Formulierungen zu deuten, soll entwickelt werden. Der Einsatz von Computern unterstützt diese Herangehensweise im Mathematikunterricht.*

[4] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 17.

- *Die Schüler und Schülerinnen sollen erfahren, wie das Anwenden von Mathematik geschieht, warum Anwendungen möglich sind, dass Anwendbarkeit ihre Grenzen und Gefahren hat.*
- *Selbstständiges Arbeiten allein und in Kooperation mit anderen soll eingeübt und vielfältig erprobt werden.*
- *Die Entfaltung mathematischer Phantasie und Kreativität soll ermöglicht werden.*[5]

Phantasie, Kreativität, Experimentierfreude und Problemlösefähigkeit sollten in Projektgruppen gefördert werden, damit schon vorhandene Fähigkeiten und Fertigkeiten optimal genutzt und ausgebaut werden können.
Auf dieser Grundlage bilden geeignete Aufgabenstellungen das Handwerkszeug einer den Forderungen entsprechenden und letztlich erfolgreichen Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler.

1.2 Die besondere Bedeutung der Geometrie in der mathematischen Förderung

Das Themengebiet der Geometrie beinhaltet zahlreiche Möglichkeiten, den Prozess des experimentellen Lernens den Forderungen des Lehrplans entsprechend zu unterstützen und reichhaltig zu füllen. Trotzdem wird Lehrern bei der Vermittlung des Themengebietes Geometrie dazu geraten, sich von der strikten Umsetzung eng formulierter Lehrpläne und Schulbücher zu lösen. So wird den Lernenden Raum gelassen, phantasievolle Entdeckungen zu machen und die kreative Seite der Mathematik zu erleben.
In der Didaktik der Geometrie werden nach Holland vier Aspekte[6] unterschieden, welche die Aufgabenfelder der Geometrie in Gebiete einteilen:

- **Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum**
  Als Anschauungsraum wird die räumliche Welt bezeichnet, die durch die Euklidische Geometrie beschrieben und dadurch im Laufe der Schulausbildung zu einer kognitiven Struktur geformt wird.

---

[5] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 17.
[6] Vgl. Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, 2007, S. 19ff.

- **Geometrie als deduktive Theorie**
  Durch die Reduzierung der Geometrie auf eine Basis von Grundbegriffen und Axiomen wird auf anschauliche Darstellungen geometrischer Inhalte verzichtet. Der Begriff „Geometrie“ ist hier ein abstrakter Strukturbegriff ohne inhaltliche Sinngebung.
- **Geometrie als Übungsfeld für Problemlösen**
  Einzelprobleme, die für die Axiomatisierbarkeit der Geometrie nicht wichtig sind, sollen bei Schülern die Freude am Problemlösen wecken und fördern. Die Geometrie bietet hier ein breites Feld an Möglichkeiten, Lösungen ohne die Notwendigkeit eines lückenlosen Beweises zu finden. Dadurch besteht für Lehrkräfte die Hoffnung, die hier erworbenen mathematischen Fähigkeiten der Schüler auf andere Teilgebiete der Mathematik zu übertragen.
- **Geometrie als Vorrat mathematischer Strukturen**
  Die Geometerie steht insbesondere mit der Algebra in Wechselbeziehung. Mit Hilfe der Geometrie können algebraische Begriffe veranschaulicht werden, während die Algebra mit ihren Sätzen, Begriffen und Methoden zur Lösung geometrischer Probleme beiträgt. Z.B. enthält die Geometrie die Diedergruppen[7], die zur geometrischen Veranschaulichung einer Klasse nicht kommutativer endlicher Gruppen dient.

Die Unterscheidung von Inhalts- und Prozesszielen spielt in der Didaktik der Geometerie dabei die gleiche wichtige Rolle, wie in der allgemeinen mathematischen Didaktik. Sie beziehen sich unmittelbar auf die Aspekte der Geometrie und erklären die Bedeutung des Geometrieunterrichts für Schüler.

Nach Holland sind Inhalts- und Prozessziele wie folgt zu unterscheiden:

- ***Inhaltsziele*** *beziehen sich auf spezielle mathematische Inhalte. Sie betreffen Kenntnisse von Begriffen, Sätzen, Formeln, Verfahren, Definitionen und Beweisen, sowie Fertigkeiten bei der einfachen*

[7] Symmetriegruppen der Drehung und Spiegelung eines regelmäßigen n-Ecks.

Anwendung dieser Kenntnisse. Inhaltsziele sind kurzfristig realisierbar und leicht zu operationalisieren.

- ***Prozessziele** beziehen sich auf mathematische Aktivitäten – wie z.B. Beweisen, Mathematisieren, Konstruieren – und betreffen die Fähigkeiten zu derartigen Aktivitäten. Prozessziele sind zwar an Inhalte gebunden, aber ihre Realisierung ist nur durch Übung an vielen Inhalten – und daher nur längerfristig – möglich. Das Operationalisieren von Prozesszielen ist deshalb nicht ganz einfach.*[8]

Die Einteilung der Prozessziele in sieben Kategorien verdeutlicht die langfristige Struktur:[9]

1. Die Fähigkeit zum **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge bedeutet, Fallunterscheidungen durchzuführen, neue Zusammenhänge auf der Grundlage bekannter Sachverhalte zu entdecken und diese auf ihre Allgemeingültigkeit zu überprüfen.
2. Die Fähigkeit zum **Formalisieren** meint, geometrische Konstruktionen zu beschreiben, die Umkehrbarkeit von Sätzen zu überprüfen und Berechnungsvorschriften als Formeln zu notieren.
3. Die Fähigkeit zum **Definieren** bedeutet insbesondere, Definitionen von Sätzen zu unterscheiden und sinnvoll einzusetzen.
4. Unter der Fähigkeit zum **Beweisen** wird verstanden, die Notwendigkeit eines Beweises zu erkennen, Lücken in einem Beweis zu entdecken und spezielle Beweistechniken anwenden zu können.
5. Die Fähigkeit zum **Axiomatisieren** beinhaltet, verschiedene Beweise desselben Satzes zu vergleichen und zu bewerten und zwischen Grund- und Folgesätzen zu unterscheiden.
6. Die Fähigkeit zum **Problemlösen** bedeutet, geometrische Konstruktionsprobleme und Beweisprobleme zu lösen und Problemlösungen zu beurteilen und zu verbessern.

[8] Vgl. Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, 2007, S. 16.
[9] Vgl. ebd., S. 16ff.

7. Die Fähigkeit zum **Mathematisieren** meint, zu Textaufgaben und Umweltsituationen mathematische Modelle anzugeben und geometrische Verfahren zur Darstellung und Mathematisierung nicht-mathematischer Problemstellungen zu benutzen.

Als übergeordnetes Prozessziel wird in der Didaktik die Entwicklung angesehen, die Schüler durchlaufen, wenn sie mathematische Entdeckungen machen. In diesem Zusammenhang muss den Lernenden die Möglichkeit zur kreativen Erschließung dieses Prozesses gegeben werden. Kreativer Unterricht durchläuft nach einem auf Unterricht angepassten Kreativitätsmodell[10] vier Phasen zur Problemlösung:

- experimentelle Phase
- entdeckende Phase
- entwickelnde Phase
- erarbeitende Phase

Innerhalb jeder dieser Phasen werden die verschiedenen Prozessziele mathematischen Lernens angesprochen. So wird Wissen nicht operationalisiert, sondern die Fähigkeiten des *„mathematisch auszubildenden Individuums“* [11] in den Vordergrund gestellt.

1.3 Computer im Geometrieunterricht

Die angesprochenen Ziele und Aspekte des Geometrieunterrichts können durch den gezielten Einsatz von Computern im Mathematikunterricht unterstützt werden. Der sachgerechte, reflexive und kreative Umgang mit den elektronischen Medien[12] ist ein integrativer Bestandteil von Unterricht und ermöglicht den Schülern Entwicklungen in vielfältigen Lernsituationen.

Die Fähigkeit des Modellierens, des Mathematisierens und mathematische Formulierungen zu deuten, werden dabei genauso gefördert, wie

[10] Vgl. Weth, Th., Kreatives Lernen im Geometrieunterricht, 1996, S. 82ff.
[11] Vgl. ebd.
[12] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 9.

mathematische Mittel zur Beschreibung und Bewältigung von inner- und außermathematischen Problemstellungen einzusetzen. Kreativität und Experimentierfreudigkeit werden dabei nicht nur auf das Lösen von Problemen reduziert, sondern tragen in hohem Maße zu einem Endergebnis bei, das von den Lernenden selbst geschaffen wurde und für den Unterricht und seinen weiteren Verlauf wichtig ist[13].

In der Unterrichtsgestaltung liegt bei dem Einsatz von Computern der Schwerpunkt auf dem experimentellen Umgang mit Ideen und Vorstellungen. Dabei sollen eigene Wege und Umwege beschritten werden, ohne vorgegebenen Regeln zwingend folgen zu müssen.[14]

Der Einsatz von Computern zur Lösung geometrischer Probleme erlaubt auch auf einem inhaltlichen Niveau, das über den regulären Unterricht hinaus geht, die weitere Ausbildung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Aus didaktischer Sicht werden dem Computer drei Rollen zugeschrieben[15]:

1. **Computer als Unterrichtsgegenstand**
   Die Analyse des Computers als Gegenstand, den man im Unterricht einsetzen kann, fordert die Auseinandersetzung mit seinen wichtigsten Funktionsprinzipien. Damit sind vor Allem der Aufbau, die Programmierung und die Anwendung gemeint. Hier ist jedoch nicht das Heranführen Schülern an die Benutzung des Computers gemeint. Dieser Aspekt spielt also nur eine untergeordnete Rolle.
2. **Computer als Lern- und Informationsmedium**
   In gleicher Weise wie die etablierten Lehrmedien Schulbücher, Arbeitsblätter, Foliensammlungen und Lehrfilme soll der Computer unterstützend auf den Lernprozess der Schüler einwirken. Computer sind dabei flexibel nutzbar. Darüber hinaus können sie interaktives Lernen durch direkte Rückmeldungen fördern.
3. **Computer als Werkzeug**

[13] Vgl. Weth, Th., Was bringt der Computer “wirklich” Neues für den Geometrieunterricht?, 1996, S. 19.
[14] Vgl. Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Bremen, 2001, S. 18ff.
[15] Vgl. Schreiber, A., Computer im Mathematikunterricht, 2008 (Internetquelle).

> Die grafische Darstellung mathematischer Sachverhalte und das Modellieren und Konstruieren geometrischer Problemstellungen gehören zu den zentralen Aufgaben des Computers in der Schule. Die meisten Programme sind dabei pädagogisch ausgelegt und damit für den Einsatz im Schulunterricht geeignet.

Im alltäglichen Mathematikunterricht ist der Einsatz von Computern (noch) nicht flächendeckend etabliert. Gerade deshalb bieten Projekt- und Fördergruppen interessante Möglichkeiten, das Medium Computer in den Fokus mathematischer Instrumente zu rücken. Ohne durch den Einsatz von Lernsoftware eine Revolution mathematischen Lehrens und Lernens erwarten zu können, stellt der gezielte Einsatz von Computern im Mathematikunterricht, ganz speziell im Geometrieunterricht, eine sinnvolle Ergänzung und Erweiterung der Möglichkeiten dar.

1.4 Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware

Mit Konstruktionswerkzeugen wie Bleistift, Geodreieck und Zirkel ist das Konstruieren geometrischer Figuren ohne Frage möglich. Jedoch ist das Ergebnis oft nur mühsam veränderbar oder korrigierbar, während geometrische Zusammenhänge anhand von Lagebeziehungen, die sich ändern können, nur sehr aufwendig nachzuvollziehen sind.
Dieses Problem wird von Software-Programmen, die das dynamische Verändern von Figuren unter Beibehaltung der Konstruktionszusammenhänge ermöglichen, umgangen.
Die wichtigsten Merkmale dynamischer Geometriesoftware sind:

- Der Zugmodus, der die unmittelbare Beweglichkeit und von Objekten ermöglicht.
- Die Möglichkeit, Ortslinien abhängiger Punkte anzuzeigen.
- Das Erstellen von Makros zur ökonomischen Nutzung.
- Das Ausdrucken von Arbeitsblättern zum Einsatz im Unterricht.

Diese Eigenschaften dynamischer Geometriesoftware unterstützen in hohem Maße die experimentelle Vorgehensweise von Schülern zur Problemlösung und -erfassung. Die Lehrperson sollte beim Einsatz der Lernsoftware jedoch unbedingt beachten, dass die so begleitete Erschließung geometrischer Zusammenhänge keinen fundierten Beweis ersetzt. Einen gewissen Beitrag zur Förderung des Beweisverständnisses kann der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware trotzdem bringen.
Das Beweisen wird nach Holland in drei Niveaustufen[16] eingeteilt:

- Stufe des Argumentierens
- Stufe des inhaltlichen Schließens
- Stufe des formalen Schließens

Auf der Stufe des Argumentierens ist die mündliche Begründung in Bezug auf eine Beweisfigur gefragt. Hier ist dynamische Geometriesoftware sehr hilfreich, um mit Hilfe von Veränderungen der Beweisfigur (Zugmodus) Fallunterscheidungen zu entdecken. Das Generieren von Beispielen zur Überprüfung von Vermutungen wird durch dynamische Geometriesoftware unterstützt und vereinfacht. Konstruktionen, die mit Stift und Papier gemacht wurden, sind sehr viel mühsamer zu erforschen, was schneller zur Demotivation der Lernenden führen kann. Die Schüler lernen so, dass Konstruktionen, die im Einzelfall (lageabhängig) richtig sind, nicht unbedingt allgemeingültig sein müssen. Das Beweisverständnis der Schüler, das auf dieser Ebene des Beweisens gebildet wird, ist daher als Basis für die Ausbildung weiterführender Fähigkeiten anzusehen.
Für die Bearbeitung von Aufgabenstellungen, die im Kontext von Förder- und Projektgruppen gestellt werden, reicht das Beweisen im Sinne von Argumentieren nicht mehr aus. Dennoch können inhaltlich korrekte und formal erschlossene Beweise auf der Grundlage von Erfahrungen, die auf der Stufe des Argumentierens mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware gemacht wurden, entwickelt und überprüft werden.

[16] Vgl. Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, 2007, S. 131ff.

Immer muss jedoch bedacht werden, dass der Computer mit seinen aufgezeigten Möglichkeiten das eigene Denken unterstützt, es den Schülern jedoch nicht abnimmt. Der Charakter des Computers und seiner Software als Instrument zum Betreiben von Geometrie bleibt stets gewahrt.

1.5 Die dynamische Geometrie- und Algebra-Software GeoGebra[17]

GeoGebra vereint geometrische, algebraische und analytische Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in einem Programm. Die Darstellung von mathematischen Objekten erfolgt in einem Zeichenfenster, in dem die geometrischen Figuren direkt konstruiert werden können. Das Algebrafenster zeigt zu jedem geometrischen Objekt die zugehörigen Koordinaten bzw. die zugehörige Gleichung an. Neben der Benutzung von bereitgestellten Werkzeugen zur Erzeugung von Objekten kann die Eingabezeile zur algebraischen Eingabe von Befehlen und zur Erstellung von Objekten genutzt werden. Weiter kann das Programm analytische Inhalte wie z.B. Ableitungen von Funktionen, Integrale oder Polynome grafisch darstellen.
Nicht nur die Tatsache, dass GeoGebra ohne den Erwerb einer kostenpflichtigen Lizenz aus dem Internet heruntergeladen werden kann, macht den Einsatz in der Schule für Lehrende und Lernende gleichermaßen interessant.
Erstellte Arbeitsblätter können ausgedruckt, als dynamisches Arbeitsblatt auf eine Webseite geladen oder in ein Textdokument eingefügt werden. Durch die Möglichkeit, das Algebra-Fenster auszublenden, können Arbeitsblätter übersichtlich gestaltet werden. Durch das Erstellen von statischem und dynamischem Text können Aufgabestellungen verdeutlicht und allgemeingültige geometrische Zusammenhänge verdeutlicht werden.
Die Bedienung von GeoGebra ist auch für jüngere Schüler durch eine deutliche Symbolik und eine gut verständliche Hilfe schnell zu erlernen. Die Software kann von Schülern sowohl zur Lösung von Konstruktionsproblemen, als auch

[17] Vgl. Anhang 1: Weitere Informationen zu GeoGebra.

zur Entdeckung geometrischer Zusammenhänge, die zu einer mathematischen Problemlösung führen, genutzt werden.

2. Hintergründe zum Fermat-Problem

2.1 Pierre de Fermat

Der studierte Rechtswissenschaftler und Hobbymathematiker Pierre de Fermat trug im 17. Jahrhundert, als sich, wie Fermat, kaum ein Forscher ausschließlich mit der Mathematik beschäftigte, durch einige wichtige Erkenntnisse in der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Variations- und Differentialrechnung viel zu der Entwicklung der Mathematik in den jeweiligen Teilgebieten bei[18].

Als bekannteste Ergebnisse aus Fermats Forschungen gingen die Folgenden in die Geschichte der Mathematik ein:

- Das Fermatsche Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl, der durch Spiegelung und Brechung in seiner Richtung verändert wird, den Weg nimmt, der die kürzeste Zeit erfordert.

- Fermatsche Zahlen:

  $$F_n := 2^{2^n} + 1 \qquad n \geq 0$$

  1637 vermutete Fermat, dass alle Zahlen dieser Form Primzahlen sind. 1732 widerlegte Euler diese Vermutung. Heute vermutet man, dass es außer den ersten fünf Fermatschen Zahlen keine weiteren Primzahlen der o.a. Form gibt. Nach Fermats Formel ergeben sich die ersten fünf Zahlen als $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65537$. Schon die nächste Fermat – Zahl mit n=5, ist keine Primzahl mehr:
  $F_5 = 4\,294\,967\,297$ und hat 641 als echten Teiler.

- Großer Fermatscher Satz:

  $$x^n + y^n <> z^n \quad \forall n > 2 \; mit \; x, y, z > 0 \; und \; n, x, y, z \in \mathbb{N}$$

[18] Vgl. Anhang 2: weitere Informationen zu Pierre de Fermat

Diese diophantische Gleichung galt bis 1993 als Vermutung. Fermat behauptete in einer Randnotiz, einen Beweis gefunden zu haben, dessen Niederschrift jedoch nie gefunden wurde.
350 Jahre nach Fermats Vermutungen gelang es den Mathematikern Wiles und Taylor, einen Beweis zu führen. Sie bedienten sich dabei allerdings mathematischer Mittel, die Fermat unmöglich zur Verfügung gestanden haben können. An der Existenz eines elementaren Beweises wird deshalb weiterhin gezweifelt und die Veröffentlichung des „letzten Fermatschen Satzes“ als Rätsel ohne Lösung ganz im Stile des Pierre de Fermat angenommen.

Bei seiner Forschungsarbeit stützte Fermat sich hauptsächlich auf griechische Texte. Als eine seiner bedeutsamsten Quellen gilt das Buch „Arithmetia“ von Diophantos von Alexandria[19].
Neben René Descartes[20] (1596-1650) galt Fermat als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit. Mit Descartes zusammen gilt Fermat als Begründer der analytischen Geometrie und durch seine Erkenntnisse in der Infinitesimalrechnung wurde es möglich, Maxima und Nullstellen zu finden sowie Tangentenprobleme zu lösen.

2.2 Das Minimumproblem

Im vierten Teil seiner „Abhandlungen über Maxima und Minima“ (ca. 1644) schreibt Pierre de Fermat:

"... Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectae ad data puncta, summa trium harum rectarum sit minima quantitas."[21]

Sinngemäß übersetzt liegt das folgende Problem vor:

Gibt es in jedem Dreieck einen Punkt F so, dass die Summe der Entfernungen von F zu den drei Eckpunkten minimal ist?

[19] Griechischer Mathematiker, lebte zwischen 100 v.Chr. und 350 n. Chr., nähere Angaben sind nicht bekannt.
[20] Französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.
[21] Vgl. Baptist, P., Über ein Extremwertproblem aus der Dreiecksgeometrie (Internetquelle).

Auf Fermat selbst geht keine Lösung zurück. Jedoch befassten sich einige Gelehrte des 17. Jahrhunderts mit dem von Fermat gestellten Minimumproblem. So veröffentlichten beispielsweise Mathematiker wie Vincenzo Viviani[22] (1622-1703) und Evangelista Torricelli[23] (1608-1647) verschiedenartige Lösungen, auf die hier nicht näher eingegangen wird[24]. Bonaventura Cavalieri[25] (1598-1647) entdeckte in diesem Zusammenhang wichtige Eigenschaften des Fermatpunktes, die zur Lösung des Minimumproblems beitragen. Er fand heraus, dass die Winkel des Dreiecks alle kleiner als 120° sein müssen, damit die Minimumeigenschaft erfüllt wird.

Erst am 21. November 1816 wurde das oben geschilderte Problem an der königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin neu diskutiert. Vor militärischem Hintergrund präsentierte der damalige Extraordinarius Johann Philipp Gruson[26] (1768–1857), der als Wissenschaftler keine große Bedeutung hat, das Problem als Anwendungsaufgabe wie folgt:

> *"Man hat in einer Kantonirung oder Winterpostirung drei Posten A, B, C, welche die Lage eines spitzwinkligen Triangels bestimmen; man will zur Sicherung der Kommunikation zwischen diesen Posten noch einen vierten Posten oder ein Piket irgendwo in D so stellen, dass die dahin führenden Kommunikationswege AD, BD und CD zusammen genommen die möglichst kleinen werden, wodurch nicht allein Zeit und Arbeit der Wege erspart, sondern auch der Vorteil erhalten wird, die beiden übrigen Posten B und C auf dem kürzesten Wege sich in D vereinigen und A unterstützen können; und dieses wird nach der obigen Voraussetzung bei jedem anderen Posten, B und C, welcher angegriffen wird, gelten ..."*[27]

Die Anregung zu einer elementaren Lösung des Problems liegt unmittelbar auf der Hand. Aus schulmathematischer Sicht bedeutet diese historische Fragestellung eine vielschichtige und beziehungsreiche Motivationsaufgabe. Kratz misst solchen Motivationsaufgaben folgende Bedeutung bei

---

[22] Italienischer Mathematiker und Physiker.
[23] Italienischer Mathematiker und Physiker.
[24] Vgl. Hofmann, J.E., Über die geometrische Behandlung einer Fermatschen Extremwert-Aufgabe, 1969, S. 86ff.
[25] Italienischer Mathematiker und Astronom.
[26] Deutscher Mathematiker.
[27] Vgl. Gruson J.P., Eine geometrische Aufgabe über Minima, 1816/ 17.

"Eine Aufgabe, die für ein neues Stoffgebiet oder ein spezielles mathematisches Problem motivieren soll, erfordert eine Fragestellung, die genügend Anreiz bietet, darüber nachzudenken. Auch darf die Lösung nicht unmittelbar auf der Hand liegen, sondern sollte auf Überlegungen beruhen, die bereits in den neuen Themen- bzw. Problemkreis einführen." [28]

Die Lösung des Fermat-Problems wird im Folgenden vorgestellt. Mathematische Hintergründe zur Durchführung des Beweises werden vorangestellt und von Aufgabenbeispielen zum Einsatz in mathematischen Lerngruppen begleitet. Der motivierende und anschauliche Charakter der Geometrie steht dabei im Vordergrund.

[28] Vgl. Kratz, J., Problemstellungen aus didaktischer Sicht, 1988, S. 206-234.

3. Der Umfangswinkelsatz

3.1 Definition und Beweis

„Seien A und B zwei verschiedene Punkte der Ebene. Durch jeden Punkt P außerhalb von $\overline{AB}$ kann der Umkreis des Dreiecks ΔABP konstruiert werden. Sei M der Mittelpunkt dieses Kreises. Dann ist der Umfangswinkel $\sphericalangle APR$ halb so groß wie der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ den die Radien $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ auf dem P abgewandten Teil des Kreises einschließen.“[29]

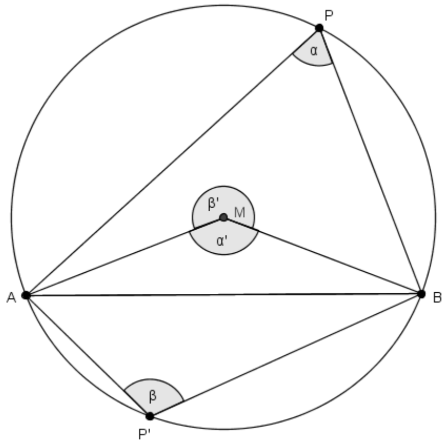

Abb. 2: Umfangs- und Zentriwinkel

Beweis:

Für die Lage des Mittelpunktes M des Umkreises des Dreiecks ΔABP ist eine Fallunterscheidung nötig.

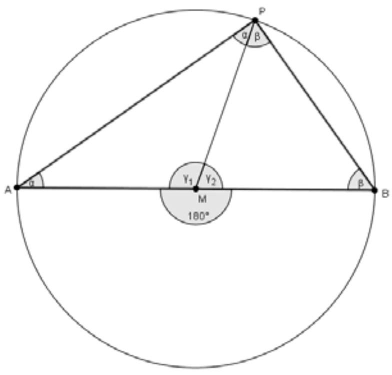

Abb. 3: Umfangswinkelsatz 1. Fall

1. Fall: M liegt auf $\overline{AB}$

Die Dreiecke ΔAMP und ΔBPM sind gleichschenklig, denn

$$|AM| = |BM| = |PM| = r.$$

Es gelten also die folgenden Beziehungen:

$$2\alpha + \gamma_1 = 180°$$

$$2\beta + \gamma_2 = 180°$$

[29] Vgl. Müller-Philipp, S., Gorski, H.-J., Leitfaden Geometrie, 2005, S. 216.

Addition der Gleichungen ergibt

$$2(\alpha+\beta)+\gamma_1+\gamma_2=360° \quad (1)$$

Weil M auf $\overline{AB}$ liegt, folgt daraus:

$$\gamma_1+\gamma_2=180°$$

Durch Einsetzen in (1) und Umformen ergibt sich

$$2(\alpha+\beta)+180°=360°$$
$$2(\alpha+\beta)=180°$$
$$\alpha+\beta=90°$$

Der in diesem Fall zum Umfangswinkel $\sphericalangle APR=\alpha+\beta$ gehörende Zentriwinkel beträgt 180°. Für diesen Fall ist der Umfangswinkelsatz bewiesen.

<u>2. Fall:</u> M liegt innerhalb des Dreiecks ΔABP.
Die Dreiecke $\Delta AMP, \Delta ABM$ und ΔBPM sind gleichschenklig, denn
$|AM|=|BM|=|PM|=r$.
Hier gelten also die folgenden Beziehungen:

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180° \quad (1)$$
$$2\alpha+\delta=180° \quad (2)$$

Aus (2) folgt

$$2\alpha=180°-\delta$$

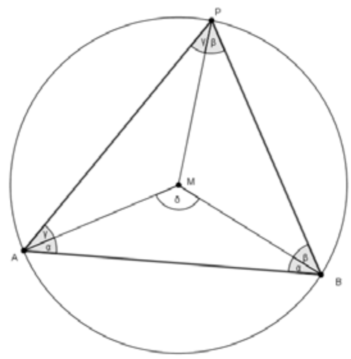

Abb. 4: Umfangswinkelsatz 2. Fall

Durch Einsetzen in (1) und Umformen ergibt sich

$$180°-\delta+2\beta+2\gamma=180°$$
$$2(\beta+\gamma)=\delta$$

Hier ist der Umfangswinkel genau $\beta + \gamma$. Der zugehörige Zentriwinkel δ ist also doppelt so groß, womit der Umfangswinkelsatz auch für diesen Fall bewiesen ist.

<u>3. Fall:</u> M liegt außerhalb des Dreiecks ΔABP.

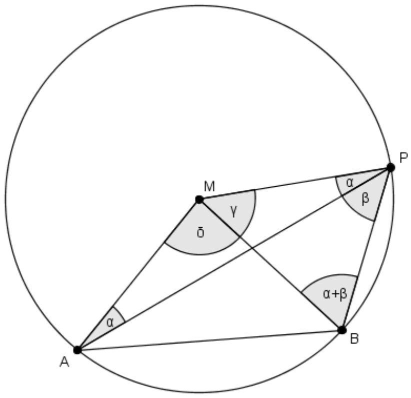

Abb. 5: Umfangswinkelsatz 3. Fall

Die Dreiecke $\Delta APM \text{ und } \Delta BPM$ sind gleichschenklig, denn

$$|AM| = |BM| = |PM| = r.$$

Es gelten also die folgenden Beziehungen:

$$2\alpha + \gamma + \delta = 180° \quad (1)$$

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = 180° \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$2\alpha = 180° - 2\beta - \gamma$$

Durch Einsetzen in (1) und Umformen ergibt sich

$$180° - 2\beta - \gamma + \gamma + \delta = 180°$$

$$\delta = 2\beta$$

Auch hier ist der Zentriwinkel δ doppelt so groß wie der zugehörige Umfangswinkel β, womit der Umfangswinkelsatz für diesen Fall bewiesen ist.

Für die Fälle, dass M auf $\overline{AP}$ bzw. $\overline{BP}$ liegt, gilt Fall 2 mit $\beta = 0$ bzw. $\gamma = 0$.
Der Umfangswinkelsatz ist hiermit vollständig bewiesen und erlaubt eine weitere Folgerung.
Bei Betrachtung der Ausgangsskizze wird die Vermutung deutlich, dass sich zwei gegenüberliegende Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AB}$ zu 180° ergänzen, da ihre Zentriwinkel zusammen 360° ergeben.
Diese Vermutung beschreibt inhaltlich einen weiteren geometrischen Satz, den Satz vom Sehnenviereck, der in Kapitel 4 näher betrachtet und bewiesen wird.

3.2 Aufgabenvorschlag

Gegeben ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Die Gerade g schneidet k in den Punkten C und D. Es sei H der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Gesucht ist eine Gerade h durch H, die k in den Punkten A und B so schneidet, dass die Strecken $\overline{AH}$ und $\overline{HB}$ von C aus unter dem gleichen Winkel erscheinen. Man zeige, dass dieser Winkel nicht größer als 45° sein kann.[30]

Konstruiere die laut Aufgabenstellung zu untersuchende Figur mit GeoGebra und formuliere auf dieser Grundlage deine Lösung. Achte darauf, dass du Aussagen, die sich auf die Konstruktion beziehen, mathematisch begründest.

3.2.1 Lösung

Nach dem Umfangswinkelsatz über der Sehne $\overline{AD}$ gilt:

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$$

Nach dem Umfangswinkelsatz über der Sehne $\overline{BD}$ gilt:

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAD|$$

Weiter gilt:

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACH| = |\sphericalangle BCH| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAD|$$

Daraus folgt, dass das Dreieck ΔBAD gleichschenklig ist und somit muss die Gerade h auf $\overline{MD}$ senkrecht stehen.

Da M und C auf derselben Seite von der Geraden h liegen, gilt:

$$|\sphericalangle ACB| \leq 90°$$

Der Winkel $\sphericalangle ACB$ ist genau dann ein rechter Winkel, wenn die Gerade h durch den Mittelpunkt Mdes Kreises verläuft (Thaleskreis). Daraus folgt aber, dass der Winkel $|\sphericalangle ACH| \leq 45°$ sein muss.

[30] Vgl. Baron, G., Windischbacher, E., Österreichische Mathematik-Olympiaden, Aufgabe 133, S. 23.

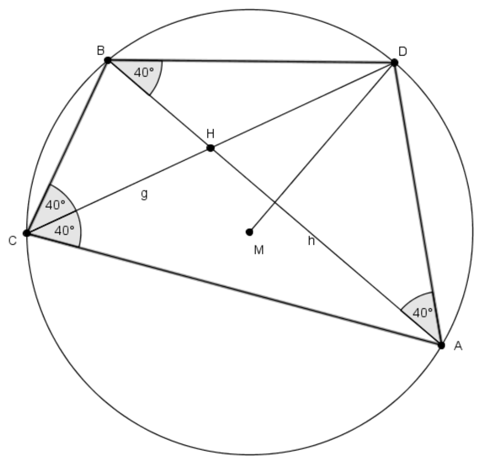

Abb. 6: 3.2 Lösungsskizze

3.2.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Umfangswinkelsatz, Erstellen einer allgemein gültigen Konstruktion in GeoGebra

3.2.3 Didaktischer Kommentar

Das didaktische und anwendungsbezogene Potential der Aufgabenstellung ist in allen Aspekten der Geometrie (vgl. 1.2) anzusiedeln. Das Erstellen einer allgemein gültigen Konstruktion durch die Bedingungen der Aufgabenstellung verlangt von den Schülern die Sichtweise auf eine Geometrie, die sich als Anschauungsraum präsentiert. Die Loslösung von dieser Sichtweise wird jedoch da nötig, wo die gegebenen Bedingungen für eine vollständige Lösung der Aufgabe nicht mehr ausreichen. Hier wird von den Schülern verlangt, Geometrie auf der Ebene des Problemlösens zu betreiben, also Zusammenhänge zu erkennen und logische Schlussfolgerungen zu ziehen, die Konstruktionsprobleme lösen. Die Folgerung, dass das Dreieck ΔBAD gleichschenklig sein muss, geht aus der Aufgabenstellung nicht hervor. An dieser Stelle müssen die Schüler den Umfangswinkelsatz auf zwei verschiedene Sehnen anwenden (vgl. Lösung), um die nötigen Winkelbeziehungen zu erhalten. Zur Begründung, dass der Winkel $\sphericalangle ACH \leq 45°$ sein muss, wird die Geometrie auch als deduktive Theorie angesprochen.

Durch Verändern der Lage von der Gerade h wird der spezielle Fall entdeckt, dass h durch M geht und das Dreieck ΔCAB rechtwinklig ist. Begründet durch den Satz des Thales wird so die maximale Größe für den Winkel $\sphericalangle ACB$ erreicht. Die geometrischen Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler werden durch die spezielle Ansprache des entdeckenden Lernens weiter ausgebaut und mit schon vorhandenen Strukturen verknüpft. So bietet sich eine interessante und im Sinne von Kratz motivierende Möglichkeit, das Begriffsverständnis über den Umfangswinkelsatz zu festigen.

4. Der Satz vom Sehnenviereck

4.1 Definition und Beweis

„Ein Viereck $ABCD$ hat genau dann einen Umkreis, wenn sich die Größen der gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen. Ein solches Viereck nennt man Sehnenviereck.“[31]

Diese Äquivalenz muss in zwei Schritten bewiesen werden.

Beweis „⇒“

Unter der Voraussetzung, dass das Viereck $ABCD$ einen Umkreis hat, ist zu zeigen, dass sich die Größen der gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen.

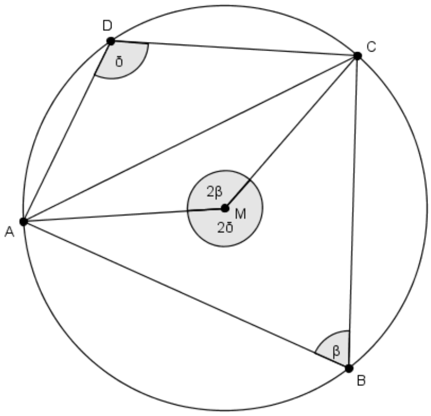

Abb. 7: Satz vom Sehnenviereck " ⇒ "

Die Dreiecke ΔABC und ΔACD haben denselben Umkreis.

Aufgrund des Umfangswinkelsatzes gilt:

$$2\beta + 2\delta = 360°$$
$$2(\beta + \delta) = 360°$$
$$\beta + \delta = 180°$$

Genau dies war zu zeigen.

Beweis „⇐“

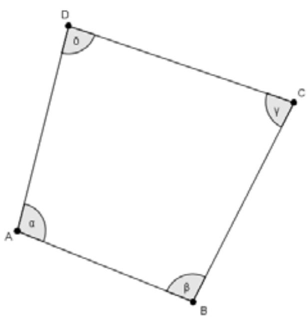

Abb. 8: Satz vom Sehnenviereck " ⇐ "

Unter der Voraussetzung, dass sich je zwei gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen, ist zu zeigen, dass das Viereck $ABCD$ einen Umkreis hat.

---

[31] Vgl. Müller-Philipp, S., Gorski, H.-J., Leitfaden Geometrie, 2005, S. 223.

Laut Voraussetzung gilt:

$$\alpha + \gamma = 180° \; und \; \beta + \delta = 180°$$

Hier ist die Betrachtung von zwei verschiedenen Fällen nötig.

<u>1. Fall:</u> $\beta = 90° = \delta$

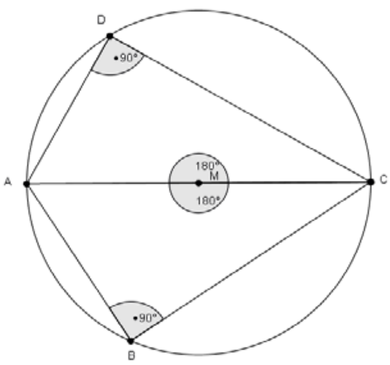

Abb. 9: Satz vom Sehnenviereck 1. Fall

In diesem Fall haben die Dreiecke ΔABC und ΔACD denselben Umkreis mit M als Mittelpunkt von $\overline{AC}$, $\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC}$ und $r = \overline{AM} = \overline{MC}$.

Für diesen Fall ist der Beweis also abgeschlossen.

<u>2. Fall:</u> Einer der Winkel ist spitz, der andere stumpf.

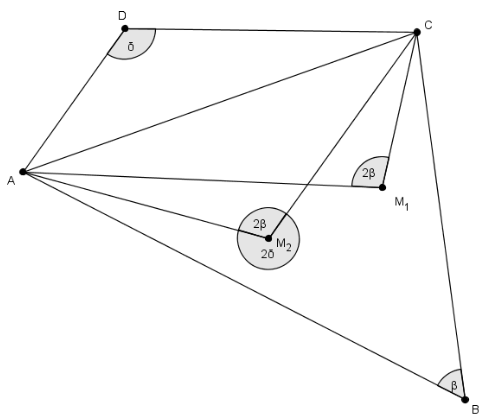

Abb. 10: Satz vom Sehnenviereck 2. Fall

Sei M_1 Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ΔACD und M_2 Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ΔABC.

Nach Voraussetzung gilt:

$$\beta + \delta = 180°$$
$$2(\beta + \delta) = 360°$$
$$2\beta + 2\delta = 360°$$
$$2\beta = 360° - 2\delta$$

Der Zentriwinkel in M_2 beträgt nach dem Umfangswinkelsatz 2δ. Sein Komplementärwinkel ist dem nach $360° - 2\delta$, also 2β. Damit ist er genauso groß wie der Zentriwinkel in M_1 zu dem Umfangswinkel β (gilt ebenfalls nach Umfangswinkelsatz).

$$\Rightarrow \; |\sphericalangle CM_1A| = |\sphericalangle CM_2A|$$

Das bedeutet, dass auch die Basiswinkel der Dreiecke ΔAM_1C und ΔAM_2C gleich groß sind, da sie beide die Seite $\overline{AC}$ als Basis haben.
Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke ΔAM_1C und ΔAM_2C kongruent. Vor allem gilt $M_1 = M_2$.
Die Umkreise der Dreiecke ΔABC und ΔADC sind identisch und bilden den Umkreis des Vierecks $ABCD$.

4.2 Aufgabenvorschlag 1

Es seien vier kongruente Kreise mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten gegeben, die durch einen gemeinsamen Punkt P gehen. Das Viereck $ABCD$, das diese Kreise umhüllt, entsteht, indem man die äußeren Tangenten an je zwei „benachbarte" Kreise legt. Man beweise, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist (d.h., dass die Summe gegenüberliegender Winkel 180° beträgt)[32].
Konstruiere die Ausgangssituation mit GeoGebra. Begründe deine Lösung anhand der Konstruktion.

4.2.1 Lösung

Man zeichnet um P einen Kreis, der zu den vier anderen Kreisen kongruent ist. Er enthält die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Ausgangskreise, das heißt $M_1 M_2 M_3 M_4$ ist ein Sehnenviereck. Jede seiner Seiten steht senkrecht auf der gemeinsamen Sehne entsprechender Kreise und wird von ihr halbiert. Diese Sehne steht senkrecht auf der entsprechenden äußeren Tangente. Also sind die Seiten von $ABCD$ parallel zu den Seiten von $M_1 M_2 M_3 M_4$ und somit ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

[32] Vgl. Baron, G., Windischbacher, E., Österreichische Mathematik-Olympiaden, Aufgabe 203, S. 31.

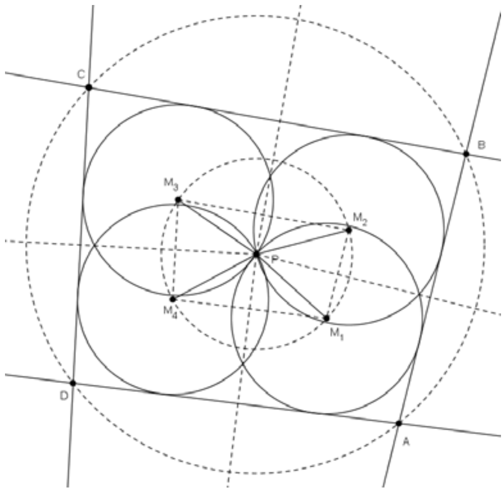

Abb. 11: 4.2 Lösungsskizze

4.2.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Satz vom Sehnenviereck

4.2.3 Didaktischer Kommentar

Auch hier wird durch die Aufforderung zur Konstruktion der Situation mit GeoGebra die Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum angesprochen. Dadurch wird vor Allem die Fähigkeit zum Problemlösen und zum Entdecken geometrischer Zusammenhänge verlangt. Die Konstruktion eines weiteren Sehnenvierecks durch die Mittelpunkte der kongruenten Kreise erfordert von den Schülern eine kreative Anwendung ihrer geometrischen Kenntnisse.
Da die mathematischen Voraussetzungen bis auf die Kenntnis des Sehnenvierecks im Schulunterricht schon in unteren Klassenstufen bereit gestellt werden, ist die Aufgabenstellung altersunabhängig einsetzbar. Dabei sollte darauf geachtet werden, den Aufforderungscharakter der Aufgabe durch entsprechende Formulierungen individuell zu variieren und anzupassen. Der Schwerpunkt kann dabei auf dem Entdecken von Konstruktionszusammenhängen oder auf dem Beweisverständnis liegen. Dadurch verändert sich auch der Anspruch an den zu erbringenden Beweis, dass das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Eine Aufgabenstellung, die

bewusst auf das Konstruieren und Entdecken der Beweisfigur ausgerichtet ist, impliziert eine Beweisführung auf der Ebene des Argumentierens. Die oben angegebene Aufgabenstellung verlangt hingegen explizit einen Beweis auf inhaltlicher oder formaler Ebene. So bietet die Aufgabe mit den angesprochenen Variationsmöglichkeiten vielfältige Einsatzmöglichkeiten zur Förderung und Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten.

4.3 Aufgabenvorschlag 2

Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dass $ABCD$ sowohl ein Sehnenviereck als auch ein Tangentenviereck ist. (Näherungslösungen z.B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung)[33]
Erstelle mit GeoGebra eine Lösungsskizze, die allgemein gültig ist, d.h. dass das Verändern der Konstruktion die Bedingungen der Aufgabenstellung immer erfüllt.

4.3.1 Lösung

Vorüberlegungen:

Da D auf dem Kreis k liegt, ist die Bedingung, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck sein soll, erfüllt (trivial).
Für ein Tangentenviereck müssen zusätzlich die folgenden Bedingungen gelten:

- $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ oder $|AB - BC| = |DA - CD|$
- o. B. d. A sei $|AB| \geq |BC|$ und damit auch $|DA| \geq |CD|$
- *E* sei derjenige Punkt auf $\overline{DA}$ mit $|DE| = |DC|$
- das Dreieck ΔDEC ist dann gleichschenklig mit $$\sphericalangle EDC = 180° - \sphericalangle ABC = 180° - \beta$$ (Eigenschaft eines Sehnenvierecks) und den Basiswinkeln $\frac{1}{2}\beta$
- also ist $|\sphericalangle AEC| = 180° - \frac{1}{2}\beta$

[33] Vgl. www.olympiaden-mathematik.de, Aufgabe 021216 (Internetquelle).

- weiter ist $|AE| = |DA| - |CD| = |AB| - |BC|$ eine bekannte Länge

Durch diese Vorüberlegungen ist die folgende Konstruktion möglich:
Es wird derjenige Kreisbogen k‘ konstruiert, der über der Sehne $\overline{AC}$ auf der B entgegengesetzten Seite den Winkel $180° - \frac{1}{2}\beta$ fasst. Das kann z.B. durch die Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks ΔAFC mit den Basiswinkeln $\frac{1}{4}\beta$ erreicht werden.
Der Schnittpunkt von k‘ mit dem Kreis k“ liefert den Punkt E. k“ hat dabei den Mittelpunkt A und den Radius $|AE| = |AB| - |BC|$.
Die Verlängerung von $\overline{AE}$ schneidet k dann im gesuchten Punkt D.

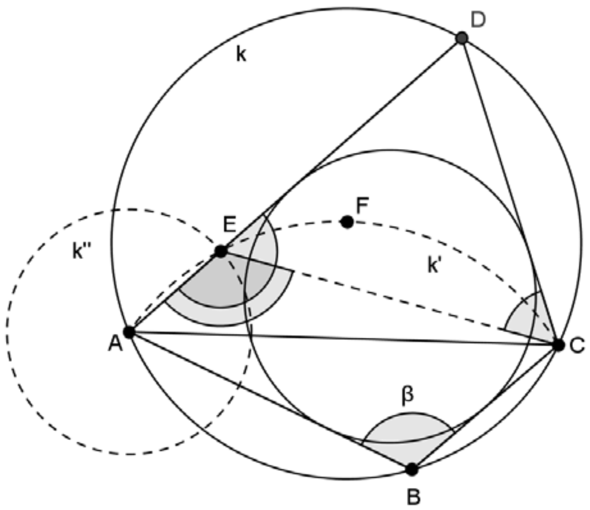

Abb. 12: 4.3 Lösungsskizze

4.3.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

- Satz vom Sehnenviereck
- Satz vom Tangentenviereck

  *„**Tangentenviereck**, konvexes Viereck, dessen Seiten einen Kreis berühren, das heißt Tangenten an den Kreis sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Summen der Längen gegenüberliegender Seiten gleich sind.“*[34]

  Ein Tangentenviereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn gilt $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Die vorgestellte Lösung greift jedoch nicht auf diesen Zusammenhang zurück.
- Sicherheit in der Anwendung der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra

4.3.4 Didaktischer Kommentar

Der Aspekt des Problemlösens ist ein wesentlicher Beitrag, den die Geometrie zur Förderung und Weiterentwicklung mathematischen Denkens und Handelns leistet. Wie das in Verbindung mit anderen Zielen und Aspekten der Geometrie stattfinden kann, zeigt dieses Aufgabenbeispiel. Die Aufgabenstellung verlangt ein Viereck, dass sowohl die Eigenschaften eines Sehnenvierecks, als auch eines Tangentenvierecks besitzt. Dafür ist strukturiertes Denken auf axiomatischer Ebene nötig, um die Zusammenhänge zwischen den charakterisierenden Sätzen zu erkennen. Da D das Dreieck ΔABC in jedem Fall zu einem Sehnenviereck ergänzt, muss D so konstruiert werden, dass die Seitenverhältnisse der Definition eines Tangentenvierecks entsprechen (vgl. 4.3.2).

Durch die Benutzung dynamischer Geometriesoftware muss hier besonderer Wert auf eine Konstruktionsbeschreibung gelegt werden, die eine Lösung durch Probieren ausschließt und somit allgemein gültig ist. Die Analyse gegebener Zusammenhänge und Inhalte vor bzw. parallel zu dem Erstellen einer

[34] Vgl. Meyers Lexikon (Internetquelle), 2008.

geometrischen Konstruktion fördert die Fähigkeit zum Definieren, bei der es um die Konzentration auf wesentliche Aussagen geht.

Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware und die Analyse von Bedingungen, die sich aus Sehnen- und Tangentensatz ergeben, ergänzen sich in diesem Aufgabenbeispiel gegenseitig. Die Veranschaulichung des Problems durch eine skizzenhafte Darstellung am Computer ermöglicht das unmittelbare Überprüfen von Lösungsideen, während das Formulieren und Weiterentwickeln bestehender Zusammenhänge das Konstruieren der Lösungsskizze in die richtige Richtung lenkt. Die Formulierung der Lösung weicht hier in sofern von anderen Aufgaben mit Einsatz dynamischer Geometriesoftware ab, als dass die Konstruktion das Ergebnis entdeckter geometrischer Zusammenhänge aufgrund von Sätzen ist. Im Gegensatz dazu führt die Untersuchung einer Konstruktion oft erst zu konkret formulierten Zusammenhängen.

5. Die Umkehrung des Umfangswinkelsatzes

5.1 Definition und Beweis

„Alle Punkte, von denen aus man die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ unter demselben Winkel γ sehen kann, liegen auf einem Kreisbogen, für den der Zentriwinkel $\varepsilon = 2\gamma$ ist.“ (vgl. Abb. 14)

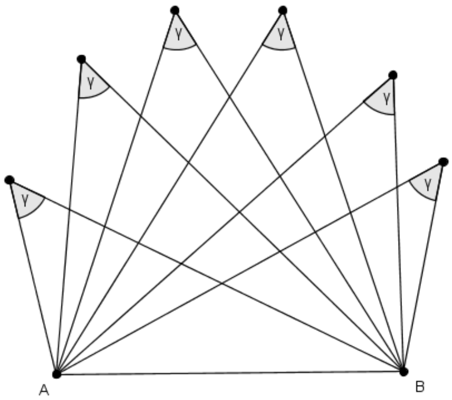

Abb. 13: Winkel gleicher Größe über einer Strecke

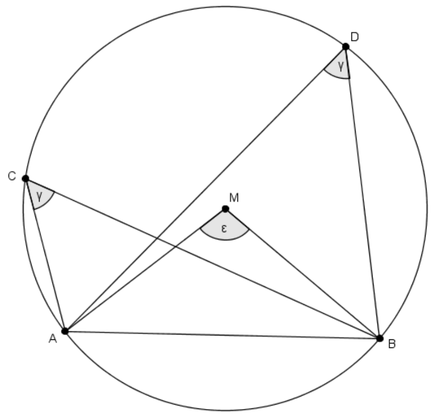

Abb. 14: Umfangs- und Zentriwinkel

Es ist zu zeigen, dass das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, in dem, wie bereits gezeigt, der Umfangswinkel halb so groß ist, wie der zugehörige Zentriwinkel (Abb. 14)

Sei E der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ mit dem Umkreis des Dreiecks ΔABC. Laut dem Umfangswinkelsatz gilt dann

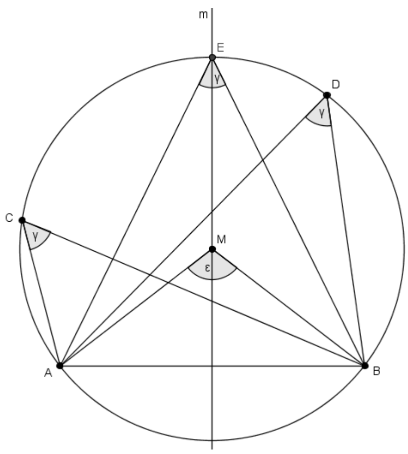

Abb. 15: Umkehrung des Umfangswinkelsatzes

$$\sphericalangle AEB = \gamma$$

Sei E‘ der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle$ABD. Laut dem Umfangswinkelsatz gilt dann

$$\sphericalangle AE'B = \gamma$$

Offensichtlich gilt $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AE'B|$. Damit sind die Dreiecke ΔAEB und $\Delta AE'B$ identisch, da sie beide gleichschenklig sind und

in Scheitelwinkel und Grundseite übereinstimmen. Die Dreiecke ΔABC und ΔABD haben also einen gemeinsamen Umkreis.
Daraus folgt unmittelbar, dass das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

5.2 Aufgabenvorschlag 1

Auf dem Arbeitsblatt „Umkehrung des Umgangswinkelsatzes“[35] ist ein Punktevorrat angelegt. Die Punkte sollen da abgelegt werden, wo in dem Punkt C des Dreiecks ΔABC ein Winkel von 80° entsteht.
Welche Lage haben die so positionierten Punkte zueinander?
Formuliere dein Ergebnis allgemein in einem Satz.

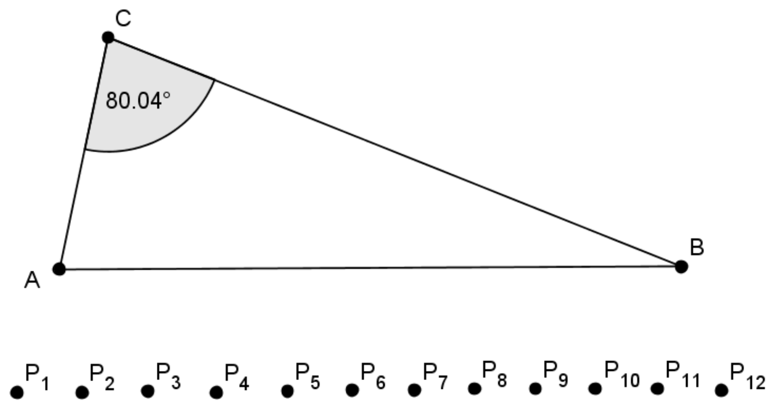

Abb. 16: Arbeitsblatt "Umkehrung des Umfangswinkelsatzes"

5.2.1 Lösung

Die Punkte bilden einen Kreisbogen über der Strecke $\overline{AB}$. Allgemein bedeutet das, dass alle Punkte, von denen aus eine Strecke $\overline{AB}$ unter dem gleichen Winkel erscheint, auf einem Kreisbogen liegen.

[35] Das Arbeitsblatt befindet sich als ggb-Datei auf der beiliegenden CD-ROM.

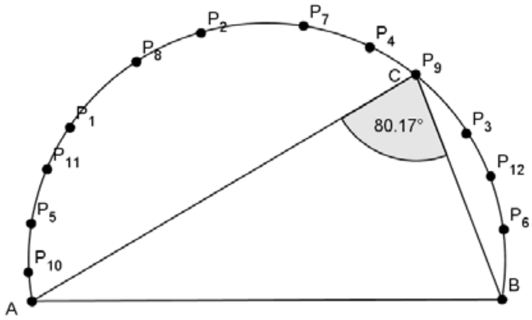

Abb. 17: 5.2 Lösungsskizze

5.2.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Bedeutung der Umkehrung eines Satzes (speziell Umkehrung des Umfangswinkelsatzes), eigenständiges Formulieren eines Satzes

5.2.3 Didaktischer Kommentar

Die Umkehrung des Umfangswinkelsatzes kann durch die vorgestellte Aufgabe entdeckt und selbstständig definiert werden. Der Prozess der Begriffsbildung wird angesprochen, in dem den Lernenden Raum zum Ausprobieren, Erforschen und Vermuten gegeben wird. Der Einsatz von GeoGebra als dynamische Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess. Die Vermutung, dass die abgelegten Punkte einen Kreisbogen über $\overline{AB}$ bilden, kann von den Schülern direkt überprüft werden. Weiter kann der Winkel in C verändert werden, um die Zusammenhänge auf Allgemeingültigkeit zu überprüfen. An dieser Stelle wird der Prozess des Beweisens bereits auf anschaulicher Ebene angesprochen und kann durch die Aufforderung zur Erbringung eines inhaltlichen oder sogar formalen Beweises erweitert werden.

Durch das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten bietet sich zusätzlich die Möglichkeit, Fähigkeiten im Bereich des Formalisierens und Definierens auszubauen. Die vorhergehenden Prozesse des Entdeckens und Erkundens werden durch die Aufgabenstellung angesprochen und bilden die Grundlage für die eigenständige Bildung eines Begriffs bzw. Satzes. Die Kenntnis des Umfangswinkelsatzes ist dabei nicht unbedingt Voraussetzung für die Entdeckung seiner Umkehrung. Allerdings sollten die Sätze bald miteinander in

Verbindung gebracht werden, um die Fähigkeit des Formalisierens im Bereich der Wenn-Dann-Aussagen zu verbessern.

5.3 Aufgabenvorschlag 2

In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei ein Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ derart gewählt, dass $|AP|:|PB| = |AD|:|DC|$ und zusätzlich $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DCB|$ gilt.
Beweise, dass dann $|\sphericalangle ADC| = 2 * |\sphericalangle PDB|$ gilt.
Überprüfe deinen Lösungsweg durch eine Konstruktion mit GeoGebra.
Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegen.[36]

5.3.1 Lösung

Die Parallele zur Geraden PD durch den Punkt B schneide AD im Punkt Q.
Nach Voraussetzung ist

$$|AP|:|PB| = |AD|:|DC| \quad (1)$$

und

$$|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DCB| \quad (2)$$

Weiter gilt (Stufenwinkel an parallelen Geraden):

$$|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DQB| \quad (3)$$

Nach Voraussetzung (2) folgt damit:

$$|\sphericalangle DQB| = |\sphericalangle DCB|,$$

wobei C und Q auf derselben Seite von $\overline{BD}$ liegen. Aus der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes folgt:

Das Viereck $DBCQ$ hat einen Umreis. (4)

[36] Vgl. Mathematik-Olympiaden e.V., Die 45. Mathematik-Olympiade 2005/ 2006, Aufgabe 451036, S. 63.

Zudem folgt aus Voraussetzung (1) und dem ersten Strahlensatz:

$$|AD|:|DC| = |AP|:|PB| = |AD|:|DQ|,$$

$$\Rightarrow \; |DC| = |DQ|$$

Das Dreieck ΔDCQ ist also gleichschenklig mit

$$|\sphericalangle QCD| = |\sphericalangle DQC| \quad (5)$$

Außerdem gilt (Wechselwinkel an den Parallelen PD und BQ):

$$|\sphericalangle PDB| = |\sphericalangle QBD| \quad (6)$$

Nach dem Umfangswinkelsatz gilt

$$|\sphericalangle QBD| = |\sphericalangle QCD|,$$

also mit (6) $|\sphericalangle PDB| = |\sphericalangle QCD|$

$\Rightarrow$ mit (5) $|\sphericalangle DQC| + |\sphericalangle QCD| = 2 * |\sphericalangle QCD| = 2 * |\sphericalangle PDB|$

Das war zu beweisen.

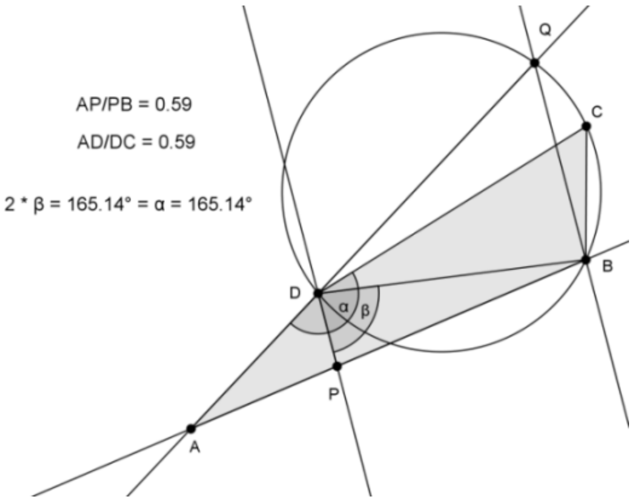

Abb. 18: 5.3 Lösungsskizze

5.3.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Umkehrung des Umfangswinkelsatzes, Umfangswinkelsatz, Konstruktion mit dynamischer Geometriesoftware

5.3.4 Didaktischer Kommentar

Auch hier werden die Schüler mit verschiedenen Aspekten und Lernzielen der Geometrie konfrontiert. Die Aufgabenstellung fordert die Fähigkeit des Problemlösens auf Konstruktions- und formaler Beweisebene. Die Konstruktion einer zusätzlichen Geraden, die parallel zu einer der Seiten des Vierecks $ABCD$ verläuft, spricht den entdeckenden und kreativen Umgang mit Problemstellungen an.

Zur mathematisch korrekten Lösung ist die sichere Anwendung schulmathematisch und anders bereit gestellter Inhalte nötig. Die Anwendung des Umfangswinkelsatzes und seiner Umkehrung in einer Aufgabe verdeutlicht, wie wichtig die Fähigkeit des Formalisierens im Hinblick auf eine lückenlose Beweisführung auf formaler Ebene ist.

Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware unterstützt auch hier den Prozess des Problemlösens. Eine Konstruktion der Situation kann sowohl zur Überprüfung des formalen Lösungswegs als auch zur Begleitung einzelner Lösungsschritte eingesetzt werden. Da die Allgemeingültigkeit der Konstruktion gewahrt bleiben muss, ergeben sich Erschließungen geometrischer Zusammenhänge oft durch schrittweises Konstruieren und zusätzliche Objekte, wie hier die parallele Gerade.

6. Der Satz von Viviani

6.1 Definition und Beweis

„Die Summe der Abstände irgendeines Punktes aus dem Inneren eines gleichseitigen Dreiecks von den Seiten des Dreiecks ist eine Konstante, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.“[37]

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich über die Aufteilung der Dreiecksfläche in drei Teilflächen:

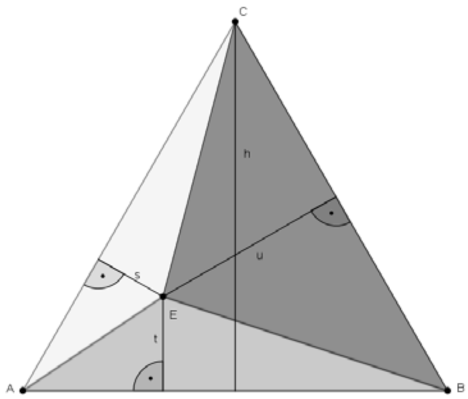

Abb. 19: Satz von Viviani

Die Fläche A_{ges} des gleichseitigen Dreiecks ΔABC ist gleich der Summe der Flächen der Dreiecke ΔABE, ΔBCE und ΔCAE. Also gilt:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_{ges}$$

Die Fläche eines Dreiecks wird mit der folgenden Formel berechnet:

$$A = \frac{g * h}{2}$$

wobei g die Grundseite des jeweiligen Dreiecks ist. Hier ergibt sich für g also:

$$g = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

[37] Vgl. www.mathematische-basteleien.de (Internetquelle)

Mit

$$A_1 = \frac{g * h_1}{2}$$

$$A_2 = \frac{g * h_2}{2}$$

$$A_3 = \frac{g * h_3}{2}$$

ergibt sich für A_{ges} über die Berechnung der Teilflächen (vgl. Abb. 19)

$$A_{ges} = \frac{g}{2} * (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{g}{2} * (s + t + u)$$

Weiter gilt für A_{ges}:

$$A_{ges} = \frac{g}{2} * h_{ges}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Gesamtfläche ergibt sich:

$$\frac{g}{2} * (s + t + u) = \frac{g}{2} * h_{ges}$$

und somit folglich

$$(s + t + u) = h_{ges}$$

Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks zu den Seiten dieses Dreiecks ist also gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

6.2 Aufgabenvorschlag

Beweise anschaulich den Satz von Viviani:

> „Die Summe der Abstände irgendeines Punktes aus dem Inneren eines gleichseitigen Dreiecks von den Seiten des Dreiecks ist eine Konstante, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.“

Benutze dafür auch die dynamische Geometriesoftware GeoGebra!

6.2.1 Lösung

Ein möglicher Lösungsweg ist oben skizziert. Weitere Lösungsansätze sind nicht auszuschließen. Da zur Bearbeitung der Aufgabe dynamische Geometriesoftware bereit gestellt werden soll, sind auch Beweise bzw. Begründungen auf argumentativer Ebene möglich.

6.2.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Satz von Viviani

6.2.3 Didaktischer Kommentar

Die Verknüpfung der Beweisebenen ist mit dieser Aufgabenstellung gut zu erreichen. Die Benutzung von GeoGebra verdeutlicht die geometrischen Zusammenhänge in der Beweisfigur und fördert das Beweisverständnis auf der Ebene des Argumentierens. Da sich die Geometrie zunächst als Anschauungsraum präsentiert, werden die kognitiven Fähigkeiten der Lernenden im Bereich der ebenen Geometrie gefördert.

Anhand der Beweisfigur wird das Satzverständnis ausgebildet. Der Beweis des Satzes löst die Schüler von der rein anschaulichen Ebene der Geometrie. Aufgrund der bis hier gesammelten Erfahrungen kann Geometrie nun als deduktive Theorie betrieben werden und ein formal korrekter Beweis ist möglich. Schüler, die mit dem Beweisen noch nicht vertraut sind, erfahren dieses als logische Folgerung geometrisch eindeutiger Zusammenhänge.

7 Der Fermatpunkt

7.1 Definition und Beweis

Die folgenden Eigenschaften des Fermatpunktes werden nachgewiesen:

a) Der Punkt kann mit Hilfe der Aufsatzdreiecke gefunden werden, d.h. die Ecktransversalen schneiden ich in einem Punkt
b) nur dieser Punkt besitzt die minimale Abstandssumme zu den Eckpunkten

Wie in Abb. 20 dargestellt, gelten für den Beweis des Fermatpunktes die folgenden Voraussetzungen:

1. ΔABC ist beliebig mit Innenwinkeln $< 120°$[38]
2. über den Seiten des Dreiecks sind gleichseitige Dreiecke konstruiert, $\Delta BCG, \Delta ACD, \Delta ABE$
3. die Strecken $\overline{CE}$, $\overline{AG}\ und\ \overline{BD}$ werden eingezeichnet

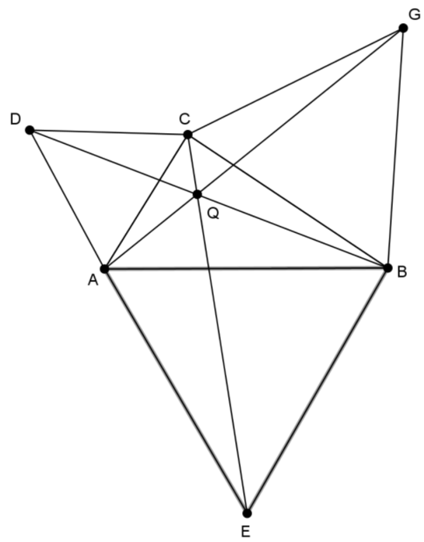

Abb. 20: Aufsatzdreiecke und Ecktransversalen

[38]Für den Fall, dass ein Innenwinkel größer oder gleich 120° ist, vgl. 7.3.

Auf der Grundlage dieser Voraussetzungen müssen die folgenden Behauptungen bewiesen werden, um den Fermatpunkt eindeutig bestimmen zu können:

1. $\overline{CE}$, $\overline{AG}\ und\ \overline{BD}$ haben den gemeinsamen Schnittpunkt Q.

2. $|\overline{AQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{CQ}| < |\overline{AR}| + |\overline{BR}| + |\overline{CR}|$
   für R beliebig innerhalb ΔABC und $R \neq Q$.

<u>Beweis zu 1.:</u>
Um die Schnitteigenschaft der drei Ecktransversalen nachzuweisen, ist die Zerstörung der Symmetrie notwendig, d.h. es ist zu zeigen, dass die dritte Ecktransversale durch den Schnittpunkt der anderen beiden Ecktransversalen geht.
Gegeben ist also: $\overline{BD} \cap \overline{CE} = \{F\}\ mit\ F = Q$
Bleibt zu zeigen: $\sphericalangle GFA = 180°$

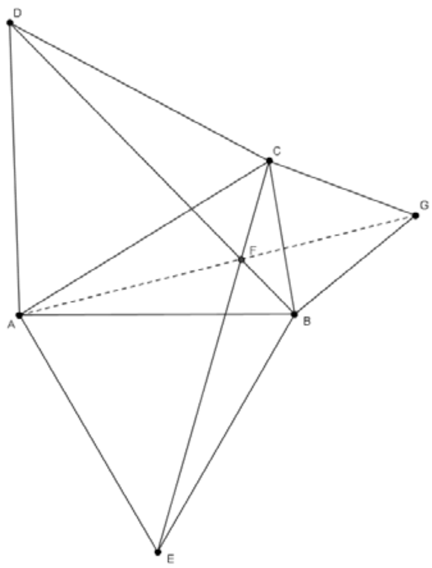

Abb. 21: Fermatpunkt 1. Behauptung

a. Beim Betrachten der Dreiecke ΔABD und ΔAEC fallen folgende Beziehungen auf:

$$|AE| = |AB|$$

laut Konstruktionsvorschrift

$$|AC| = |AD|$$

laut Konstruktionsvorschrift

$$|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle BAD|$$

beide ergeben sich durch $|\sphericalangle BAC| + 60°$

$$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta AEC$$

Kongruenzsatz SWS

Aus der Kongruenz der betrachteten Teildreiecke folgt: $|\sphericalangle FEA| = |\sphericalangle FBA|$

Aus der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes folgt, dass F auf dem Umkreis des Dreiecks ΔAEB liegt und mit den Eckpunkten des Dreiecks ein Sehnenviereck bildet.
Da, wie oben gezeigt, die Punkte A, E, B und F auf einem Kreisbogen liegen und $|\sphericalangle BEA| = 60°$ ist, gilt

$$|\sphericalangle AFB| = 180° - 60° = 120°$$

Satz vom Sehnenviereck

b. Analog zu a. ergibt sich

$$|\sphericalangle CFA| = 120°$$

c. Aus a. und b. folgt:

$$|\sphericalangle BFC| = 120°$$

Wie bereits gezeigt, liegt F auf dem Umkreis des Dreiecks ΔCBG. Aufgrund des Umfangswinkelsatzes mit der Sekante $\overline{CG}$ folgt daraus:

$$|\sphericalangle GFC| = |\sphericalangle GBC| = 60°$$

Die unter a., b. und c. gewonnenen Erkenntnisse lassen folgenden Schluss zu:

$$|\sphericalangle GFA| = |\sphericalangle GFC| + |\sphericalangle CFA| = 60° + 120° = 180° \quad \text{q.e.d.}$$

Die drei Ecktransversalen schneiden sich also in einem Punkt F. Es bleibt zu zeigen, dass dieser Punkt die Eigenschaft der kleinsten Summe der Verbindungsstrecken zu den Eckpunkten besitzt.

<u>Beweis zu 2.:</u>

Es ist zu zeigen:

$|AF| + |BF| + |CF| < |AD| + |BD| + |CD|$ für D beliebig innerhalb ΔABC und $F \neq D$

Aus dem Beweis für Behauptung 1.) geht hervor, dass die Seiten des Dreiecks ΔABC in dem Punkt F unter einem Winkel von 120° zu sehen sind.
Dem Beweis dieses zweiten Teils liegt die folgende Konstruktion zu Grunde:

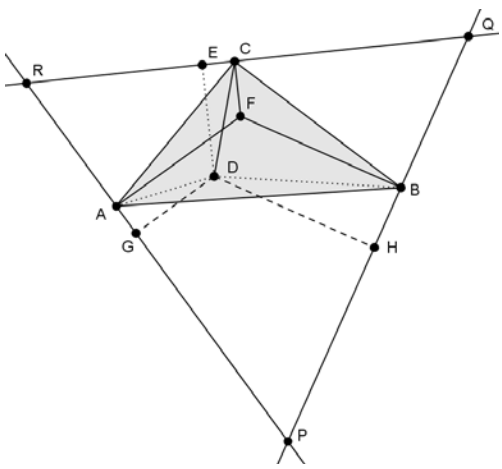

Abb. 22: Fermatpunkt 2. Behauptung: Konstruktionsgrundlage

Sei F der gesuchte Fermatpunkt für ΔABC, in dem kein Innenwinkel größer ist als 120°. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$|\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle BFC| = 120°$$

Nach Konstruktionsvorschrift gilt ebenso:

$$\overline{FC} \perp \overline{RQ}$$
$$\overline{FA} \perp \overline{RP}$$
$$\overline{FB} \perp \overline{PQ}$$

Das so konstruierte Dreieck ΔPQR ist gleichseitig:

1. $|\sphericalangle FCQ| = |\sphericalangle QBM| = 90°$
   $|\sphericalangle BFC| = 120°$
   $\Rightarrow |\sphericalangle CQB| = 360° - (120° - 90° - 90°) = 60°$ (Winkelsumme im Viereck)

2. analog ist $|\sphericalangle ARC| = 60°$

3. da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, gilt $|\sphericalangle BPA| = 60°$

Aus 1., 2., 3. folgt, dass das Dreieck ΔPQR gleichseitig ist.

Sei D ein anderer beliebiger Punkt in ΔABC, $D \neq F$, und $|DA|, |DB|$und $|DC|$ seine Entfernungen zu den Eckpunkten.
Es ist zu zeigen, dass die Abstandssumme von F zu den Eckpunkten kleiner ist, als diejenige von D zu den Eckpunkten, also:

$$|FA| + |FB| + |FC| < |DA| + |DB| + |DC|$$

Nach dem Satz von Viviani gilt:

$$|DE| + |DF| + |DG| = |FA| + |FB| + |FC| \quad *$$

mit

$$\overline{DG} \perp \overline{PR}$$
$$\overline{DH} \perp \overline{PQ}$$
$$\overline{DE} \perp \overline{QR}$$

Die kürzeste Verbindung eines Punktes mit einer Strecke ist eine Gerade, die senkrecht auf der Strecke steht.

$$|DE| + |DG| + |DH| < |DA| + |DB| + |DC|$$

Wegen * gilt:

$$|FA| + |FB| + |FC| < |DA| + |DB| + |DC| \quad \text{q.e.d.}$$

Über die Konstruktion der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke und der dazu gehörigen Ecktransversalen ist die Existenz des Fermatpunktes bewiesen.

7.2 Die geometrische Lösung von Joseph E. Hofmann

1929 gelang dem Mathematiker J. E. Hofmann ein geometrischer Beweis des Minimumproblems.

Die Leitidee, die der Lösung von Hofmann zugrunde liegt, ist die, dass von allen Streckenzügen mit gleichen Eckpunkten die gerade Linie am kürzesten ist.

Diese Lösungsstrategie wurde schon im 18. Jahrhundert von einem Mathematiker namens Giovanni Fagnano[39] (1715-1797) angewendet, indem er einem spitzwinkligen Dreieck ein Dreieck mit minimalem Umfang einbeschrieb.

Die zentrale Idee bei der Lösung des Problems von Fagnano ist das Ausnutzen der Eigenschaft eines Streckenzugs, der unter bestimmten Voraussetzungen am kleinsten ist.

Ohne weiteres kann diese Idee jedoch nicht auf das hier vorliegende Problem der minimalen Abstandssumme eines Punktes zu den Eckpunkten eines spitzwinkligen Dreiecks übertragen werden. Zunächst liegt hier kein Streckenzug vor, sondern einzelne Strecken mit einem gemeinsamen Anfangspunkt F.

[39] Italienischer Mathematiker.

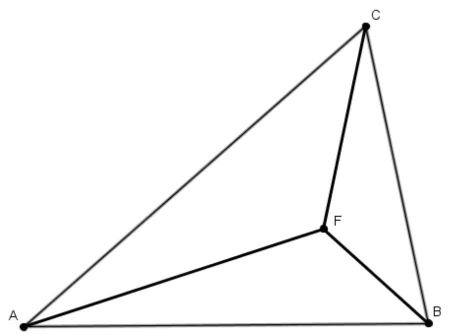

Abb. 23: Ausgangsdreieck

Diese Strecken müssen zunächst in einen Streckenzug überführt werden. Hofmann erreichte dies durch Drehung des Dreiecks ΔAFC um 60° um A. Es entsteht das Dreieck $\Delta AF'C'$.

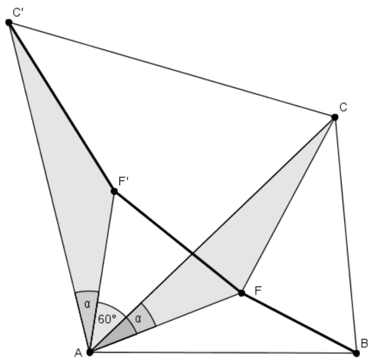

Abb. 24: Überführung in einen Streckenzug

Durch die Drehung um 60° entsteht das gleichseitige Dreieck $\Delta ACC'$, denn

$$|AC| = |AC'| \text{ und}$$

$$|\sphericalangle CAC'| = 60° - \alpha + \alpha = 60°$$

Nach dem Kongruenzsatz SWS ist $\Delta ACC'$ gleichseitig.
Dieser Streckenzug ist am kürzesten, wenn alle auf ihm liegenden Punkte eine gerade Linie bilden, also wenn gilt:

$$F \in \overline{C'B} \; und \; F' \in \overline{C'B}$$

Der so entstehende Streckenzug ist genau die Ecktransversale $\overline{C'B}$.

Wenn ein solcher Punkt F existiert, bildet er mit den Eckpunkten des Aufsatzdreiecks ein Sehnenviereck, dessen Umkreis identisch ist mit dem des Aufsatzdreiecks. Der Winkel, unter dem die Dreiecksseite von P aus gesehen wird, beträgt aufgrund des Satzes vom Sehnenviereck 120°. Das gleiche gilt analog für die anderen beiden Seiten des Dreiecks ΔABC.

Aus Hofmanns Lösung geht somit folgende Konstruktionsvorschrift für den Fermatpunkt in einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ΔABC hervor:

1. Konstruiere auf einer der Seiten ein gleichseitiges Aufsatzdreieck.
2. Konstruiere den Umkreis des Aufsatzdreiecks.
3. Der gesuchte Punkt F mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten des Dreiecks ist der Schnittpunkt des Umkreises mit der Ecktransversale.

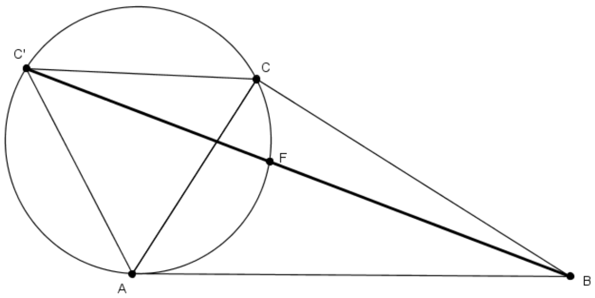

Abb. 25: Konstruktionsskizze

7.3 Dreiecke mit einem Innenwinkel größer oder gleich 120°

Bis hierher wurde der Fermatpunkt in einem Dreieck unter dem Aspekt der Minimumeigenschaft untersucht. Diese ist immer dann erfüllt, wenn der gesuchte Punkt in einem spitzwinkligen Dreieck konstruiert wird. Unter dieser Voraussetzung ist der Fermatpunkt an die Minimumeigenschaft gebunden, d.h. er erfüllt diese. Doch was passiert, wenn die Voraussetzung, dass jeder Innenwinkel des Dreiecks kleiner als 120° sein muss, aufgehoben wird?
Die folgende Abbildung stellt den Fall dar, dass ein Innenwinkel des Dreiecks ΔABC genau 120° beträgt:

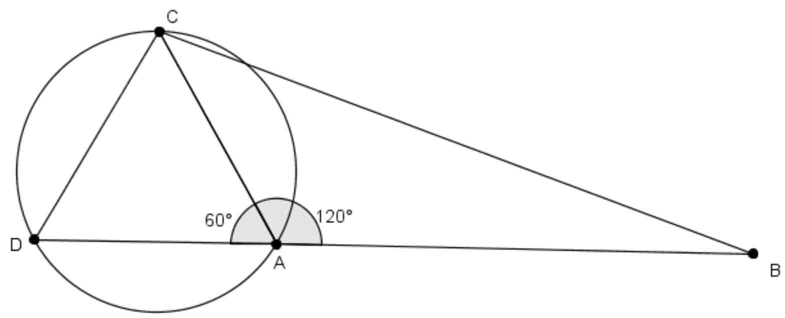

Abb. 26: Innenwinkel = 120°

Der gesuchte Fermatpunkt mit der minimalen Abstandssumme zu allen Ecken des Dreiecks ΔABC ist laut Konstruktionsvorschrift der Schnittpunkt des Umkreises eines Aufsatzdreiecks mit der zugehörigen Ecktransversale. Hier fällt dieser Schnittpunkt genau mit dem Eckpunkt A des Dreiecks zusammen, in dem der Innenwinkel 120° beträgt.
In dem Ausgangsdreieck ΔABC gilt $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Das Aufsatzdreieck ΔDAC ist gleichschenklig mit $|\sphericalangle CAD| = 60°$. Somit gilt für den Winkel $\sphericalangle BAD$:

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| = 120° + 60° = 180°$$

Die Ecktransversale $|DB|$ fällt also mit der Dreiecksseite $|AB|$ zusammen und der Fermatpunkt ist der Punkt A des Ausgangsdreiecks.

Ist ein Innenwinkel des Ausgangsdreiecks größer als 120°, erfüllt der Fermatpunkt nicht mehr die Minimumeigenschaft, wie die nachfolgende Abbildung verdeutlicht:

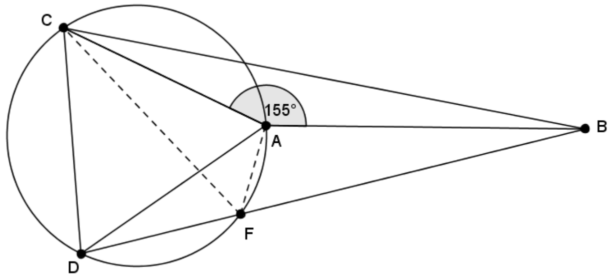

Abb. 27: Innenwinkel >120°

Der Punkt A, in dem der Innenwinkel größer als 120° ist, ist auch hier der Punkt mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten des Ausgangsdreiecks ΔABC. Dieser Punkt stimmt jedoch nicht mit dem nach Konstruktionsvorschrift erhaltenen Fermatpunkt überein. Weiter erfüllt der Fermatpunkt nicht mehr das Kriterium der minimalen Abstandsumme zu den Eckpunkten:

Nach dem 12. Euklidischen Lehrsatz[40] gilt:

$$|FC| > |AC| \; und \; |FB| > |AB|$$

daraus folgt

$$|FA| + |FB| + |FC| > |AB| + |AC|$$

Damit ist die Minimumeigenschaft des in diesem Fall konstruierten Fermatpunktes widerlegt.
Aufgrund des engen Zusammenhanges des Fermatpunktes mit der Minimumeigenschaft für den Fall, dass alle Innenwinkel des Dreiecks ΔABC kleiner sind als 120°, ergeben sich nun einige Unklarheiten bzgl. der Notation des Punktes. Auch in der Literatur ist man sich nicht einig, ob der Fermatpunkt sinngemäß die Minimumeigenschaft oder seine Konstruktionsvorschrift verkörpert. Hier wird der aufgrund der Konstruktionsvorschrift entstandenen Punkt unabhängig von der Minimumeigenschaft als Fermatpunkt bezeichnet.

[40] Vgl. Euklid, Die Elemente, 1. Buch, §19 (L. 12): *„In jedem Dreieck* (hier: ΔFAC) *liegt dem größeren Winkel* (hier $\sphericalangle \mathrm{CAF}$) *die größere Seite* (hier $\overline{\mathrm{CF}}$) *gegenüber.“* 1933.

7.4 Der 2. Fermatpunkt

Die oben angesprochene Schwierigkeit der sinngemäßen Namensgebung dieses Punktes wird auch deutlich, wenn man den zweiten Fermatpunkt näher betrachtet. Auch dieser entsteht durch die Konstruktion der Aufsatzdreiecke und der zugehörigen Ecktransversalen. Die Aufsatzdreiecke werden hier allerdings nach Innen konstruiert.

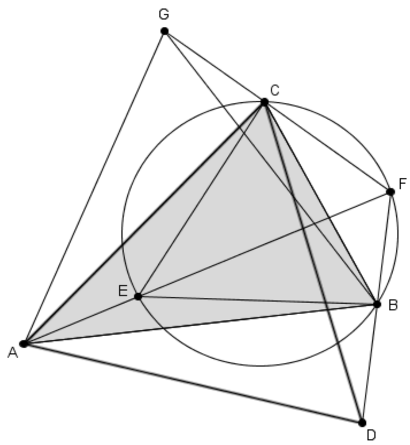

Abb. 28: Der 2. Fermatpunkt

Der Schnittpunkt des Umkreises eines Aufsatzdreiecks mit der zugehörigen Ecktransversale bildet auch in dieser Konstruktion den (zweiten) Fermatpunkt.
Dieser Punkt ist nahezu unabhängig von der Minimumeigenschaft. Er erfüllt sie nur dann, wenn er mit einem der Eckpunkte des Ausgangsdreiecks ΔABC zusammen fällt.
Mit Hilfe der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra lässt sich die Spurgerade des Fermatpunktes anzeigen, wenn man durch den Zugmodus der Software das Dreieck ΔABC verändert. Dabei wird deutlich, dass der Fermatpunkt F sich auf dem Umkreis des Aufsatzdreiecks bewegt, dessen Eckpunkt auf der Ecktransversale liegt, die mit dem Punkt des Ausgangsdreiecks verbunden ist, der bewegt wird.
Wie der erste Fermatpunkt bildet der zweite Fermatpunkt mit jedem Aufsatzdreieck ein Sehnenviereck und liegt somit unabhängig von der Lage des nicht betroffenen Eckpunktes des Dreiecks ΔABC auf dem Umkreis des jeweiligen Aufsatzdreiecks.

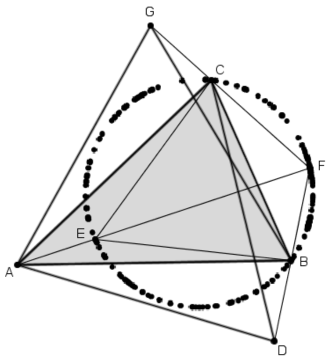

Abb. 29: 2. Fermatpunkt

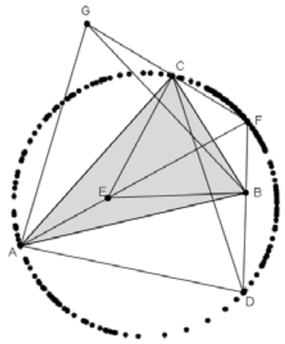

Abb. 30: 2. Fermatpunkt

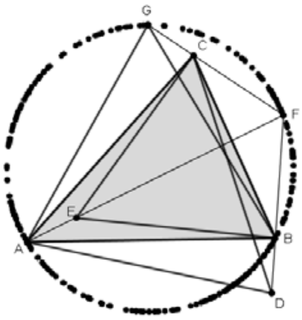

Abb. 31: 2. Fermatpunkt

7.5 Aufgabenvorschlag 1[41]

In dem vorliegenden Arbeitsblatt 1[42] ist ein beliebiger Punkt P innerhalb des Dreiecks ΔABC mit den Eckpunkten A,B und C des Dreiecks verbunden. Variiere die Lage des Punktes P so lange, bis die Summe der Streckenlängen $\overline{AP}, \overline{BP}$ und $\overline{CP}$ minimal ist. Dieser Punkt heißt Fermatpunkt. Finde weitere Eigenschaften des Fermatpunktes heraus:

a) Unter welchem (gerundeten) Winkel sind die Seiten des Dreiecks ΔABC von P aus jeweils zu sehen?

Der Fermatpunkt kann wie folgt konstruiert werden:

- Konstruiere auf jede Seite des Dreiecks ΔABC ein gleichseitiges, nach außen gerichtetes Dreieck
- Verbinde deren äußere Ecken mit der jeweils gegenüberliegenden Dreiecksecke. Nenne dabei den gegenüberliegenden Punkt von A „A_1“ usw..
- Der Schnittpunkt der drei entstehenden Strecken $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}\ und\ \overline{CC_1}$ ist der Fermatpunkt

b) Führe die Konstruktion auf dem Arbeitsblatt durch und überprüfe deine Ergebnisse aus a), indem du die Winkel mit der Funktion zum Messen von Winkeln in GeoGebra misst!

41 Vgl. Elschenbroich, H.-J., Geometrie beweglich mit Euklid, S. 32f.
42 Das Arbeitsblatt 1 befindet sich als ggb-Dateien auf der beiliegenden CD-ROM.

c) Konstruiere deine eigene Fermatpunkt-Figur und finde durch Veränderungen des Dreiecks heraus, ob der Fermatpunkt immer der Punkt mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten ist. Formuliere deine Ergebnisse mathematisch.

d) Beweise, dass die Dreiecke $\Delta AA_1C\ und\ \Delta B_1BC$ kongruent sind.

7.5.1 Lösung

a) Wenn die Lage von P so bestimmt wurde, dass die Abstandssumme minimal ist, sind alle Winkel $\sphericalangle APB, \sphericalangle BPC\ und\ \sphericalangle CPA$ gleich groß und betragen jeweils 120°. Ein ungefährer Wert oder gerundete Werte sind als richtig anzusehen.

b) Die Messwerte betragen alle genau 120° und stimmen daher mit den experimentell gefundenen Ergebnissen aus a) überein.

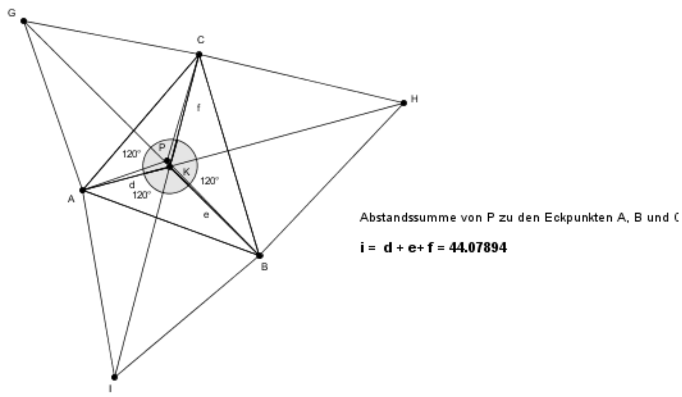

Abb. 32: 7.5 Lösung mit GeoGebra

c) Der Fermatpunkt liegt außerhalb des Dreiecks, wenn einer der Winkel $> 120°$ ist. Dann erfüllt er nicht mehr die Minimumeigenschaft. Ist einer der Winkel $= 120°$, fällt der Fermatpunkt mit einem der Eckpunkte des Dreiecks zusammen. Die Minimumeigenschaft ist dann noch erfüllt.

d) Der Beweis erfolgt über den Kongruenzsatz SWS

7.5.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Begriffserweiterung Fermatpunkt, vertiefter Umgang mit dynamischer Geometriesoftware, Kongruenzbeweise

7.5.3 Didaktischer Kommentar

Da der Fermatpunkt in der heutigen Schulgeometrie kaum Beachtung findet, ergibt sich durch die Aufgabenstellung eine sinnvolle Erweiterung der schulgeometrisch behandelten Punkte im Dreieck. Die direkte Beschäftigung mit den Eigenschaften des Fermatpunktes in einem spitzwinkligen Dreieck wird durch den Einsatz von GeoGebra unterstützt und der Umgang mit dem Programm geübt. Der experimentelle Umgang mit der Problemstellung ruft in Schülern evtl. schon die Frage „Ist das immer so“ hervor, die in weiteren Aufgabenteilen aufgegriffen wird. Nach einer eigenhändigen Konstruktion der Fermat-Figur in Aufgabenteil c) werden die Fähigkeiten des Formalisierens und Mathematisierens direkt angesprochen. Die auf anschaulicher Ebene entdeckten Gesetzmäßigkeiten für Dreiecke mit Winkeln $\geq 120°$ müssen zwar nicht bewiesen, wohl aber formalisiert und aufgeschrieben werden.
In Aufgabenteil d) wird von den Schülern ein Kongruenzbeweis gefordert. Die Behandlung von Kongruenzbeweisen fördert in hohem Maße die Fähigkeit zum Finden und Darstellen von Beweisen[43]. Dadurch wird das Beweisverständnis von Schülern gefestigt und weiterentwickelt.

[43] Vgl. Holland, G. Geometrie in der Sekundarstufe, 2007, S. 131.

7.6 Aufgabenvorschlag 2

Betrachte nun das Arbeitsblatt 2[44]. Benutze den Punktevorrat, um im Inneren des Dreiecks ΔABC Punkte zu markieren, unter denen die Dreiecksseite $\overline{BC}$ unter einem Winkel von 120° gesehen wird.

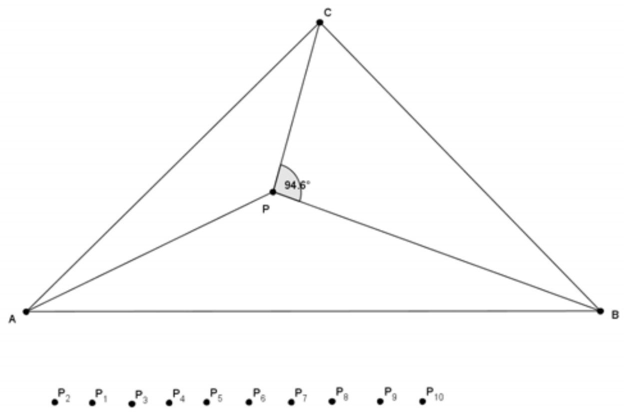

Abb. 33: Arbeitsblatt 2 Fermatpunkt

a) Welcher Zusammenhang besteht bzgl. der Lage der Punkte?
b) Konstruiere einen Punkt D so, dass das Dreieck ΔBDC mit jedem der Punkte P_n ein Sehnenviereck bildet. Zeichne den zugehörigen Umkreis.
c) Wiederhole b) so, dass das Dreieck ΔACE entsteht. Beweise, dass der Schnittpunkt der Umkreise der Fermatpunkt ist.
d) Beweise, dass sich die Ecktransversalen der Aufsatzdreiecke im Fermatpunkt schneiden!

7.6.1 Lösung

a) Die Schüler sollen erkennen, dass die Punkte P_n auf einem Kreisbogen liegen und so Umfangswinkel zu $\overline{BC}$ sind.
b) Der Winkel in dem zu konstruierenden Punkt D muss 60° messen (Satz vom Sehnenviereck). Die einfachste und hier auch sinnvollste Möglichkeit einen solchen Punkt zu konstruieren, ist ein gleichseitiges Dreieck auf die Seite $\overline{BC}$ zu konstruieren.

[44] Das Arbeitsblatt 2 befindet sich als ggb-Datei auf der beiliegenden CD-ROM.

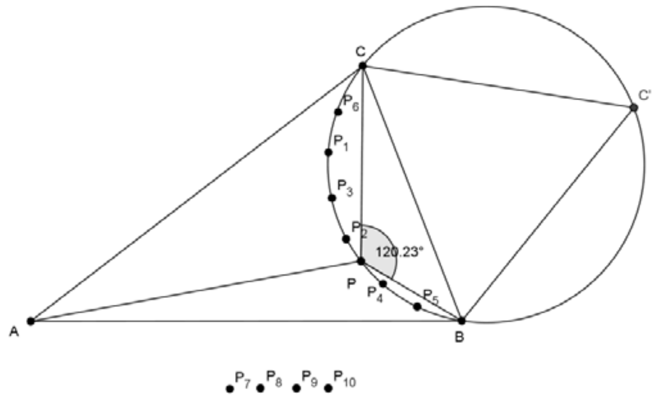

Abb. 34: Arbeitsblatt 2 Lösungsansatz

c) Die mit Arbeitsblatt 1 gefundene Eigenschaft, dass alle Dreiecksseiten vom Fermatpunkt aus unter einem Winkel von 120° gesehen werden, soll hier bewiesen werden.
   Unter der Voraussetzung, dass $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle AEC| = 60°$ ist, ergibt sich mit $S = Schnittpunkt\ der\ Umkreise$:

   $$|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSA| = 120° \text{ (Satz vom Sehnenviereck)}$$

   Daraus folgt

   $$|\sphericalangle ASB| = 360° - |\sphericalangle BSC| - |\sphericalangle CSA| = 360° - 240° = 120°$$

d) Vgl. Kapitel 7.1: Beweis zu 1.)

7.6.2 Die Schulmathematik erweiternde Inhalte der vorgeschlagenen Aufgabenstellung

Satz vom Sehnenviereck, Fermatpunkt, Umkehrung des Umfangswinkelsatzes

7.6.3 Didaktischer Kommentar

Die Grundlage zur Bearbeitung des Arbeitsblattes 2 ist das oben vorgeschlagene Arbeitsblatt 1, auf dem u.a. die Eigenschaft des Fermatpunktes erarbeitet wird, dass alle Dreiecksseiten von F aus unter einem Winkel von 120° gesehen werden.

In Aufgabenteil a) werden die Fähigkeiten der Schüler zum Entdecken angesprochen. Die Verteilung der Punkte ergibt einen Kreisbogen, der mit

GeoGebra direkt zur Kontrolle erstellt werden kann. Die so entstehende Figur greift zusätzlich die Situation der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes auf und kann zur Erweiterung der Satzkenntnis genutzt werden.
Ist das Arbeitsblatt 1 bearbeitet worden, kann davon ausgegangen werden, dass die Schüler in b) den zu konstruierenden Punkt D so wählen, dass ein gleichseitiges Aufsatzdreieck entsteht. Die Größe des Winkels muss zuvor aufgrund der Eigenschaften eines Sehnenvierecks mit 60° bestimmt werden. Ist der Fermatpunkt mit seinen Eigenschaften unbekannt, wird in besonderem Maße die Fähigkeit des Problemlösens gefordert, durch die gefundene Problemlösungen beurteilt und ggf. verbessert werden können.
Das Erbringen eines Beweises auf argumentativer Ebene, dass der Schnittpunkt der Umkreise der Fermatpunkt ist, wird durch die Visualisierung der Beweisfigur durch GeoGebra unterstützt. Ein inhaltlicher Beweis entsteht durch die Formalisierung der Zusammenhänge.
Aufgabenteil d) bietet eine Möglichkeit zur Erweiterung der Aufgabenstellung, die je nach Leistungsstand der einzelnen Schüler zur Vertiefung der Thematik und zusätzlichen Förderung der Fähigkeit des Beweisens eingesetzt werden kann. Der auf formaler Ebene geführte Beweis zur Schnitteigenschaft der Ecktransversalen ist durch die Konstruktion der Ausgangssituation nicht herzuleiten. Die anschauliche Betrachtungsweise, die durch die Geometrie ermöglicht wird, reicht also zur Problemlösung nicht aus. Die Bedeutung der Geometrie als deduktive Theorie rückt stark in den Vordergrund und fördert an dieser Stelle Fähigkeiten wie das Formalisieren und Beweisen.

8. Fazit

Die eingangs gestellte Frage „Ist das alles, was die Geometrie zu bieten hat?“ muss unter Berücksichtigung dessen, wie Geometrie sich in der vorliegenden Examensarbeit präsentiert, umformuliert werden:

Was kann die Geometrie noch bieten?

Dass Geometrie sich nicht auf den Umgang mit Zirkel und Lineal beschränkt, zeigt Kapitel 1. Die Aspekte der Geometrie, wie Holland sie beschreibt, stehen für den vielseitigen Charakter und die damit verbundenen Einsatzmöglichkeiten der Geometrie in allen Bereichen der Mathematik. Dass diese Betrachtung der Geometrie auch den Standards der heutigen Bildung standhält, zeigen die immer wieder angesprochenen Prozessziele, die mit einem reichhaltigen Geometrieunterricht erreicht und auf andere mathematische Problemstellungen übertragen werden können.
Wie sich die mathematische Förderung mit Hilfe der Geometrie in der Praxis gestalten lässt, wird in den jeweiligen Aufgabenvorschlägen deutlich. In der vorliegenden Arbeit wurde dabei besonderer Wert auf die Förderung der Fähigkeit des Beweisens gelegt. Wie unterschiedlich die Möglichkeiten sind, Geometrie in diesem Bereich einzusetzen, wird bei einem Vergleich der Aufgabenvorschläge 4.3 (Satz vom Sehnenviereck) und 6.2 (Satz von Viviani) deutlich. Die Lösung des Problems, ein Sehnenviereck zu konstruieren, das gleichzeitig ein Tangentenviereck ist, erfordert die Verknüpfung logischer Zusammenhänge und Schlussfolgerungen auf z.T. analytischer Ebene. Auf dieser Grundlage entsteht die Lösungsskizze. Der Beweis des Satzes von Viviani hingegen baut auf der Analyse einer Skizze auf. Schülern wird hier die Möglichkeit gegeben, das Beweisen über die Stufe des Argumentierens zu einem formal korrekten Beweis aufzubauen und zu erlernen.
Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware unterstützt und unterstreicht diesen in viele Richtungen ausgelegten Charakter der Geometrie. Besonders im Bereich der Allgemeingültigkeit geometrischer Zusammenhänge sind Programme wie GeoGebra sinnvolle Begleiter in der mathematischen Ausbildung begabter Schüler.

Im Rahmen dieser Examensarbeit wurden Möglichkeiten vorgestellt, wie die Ausschöpfung des Themas „Fermatpunkt“ den durch Projekt- und Fördergruppen erweiterten Mathematikunterricht beleben kann. Jedoch bieten sich durch Veränderungen der Aufgabenstellungen zahlreiche Möglichkeiten für den Einsatz des Fermatpunktes auch im regulären Mathematikunterricht in allen Altersklassen. Wie das Bilden von Begriffen und Sätzen von Schülern selbst geleistet werden kann, zeigt z.B. Kapitel 5.2. Diese Herangehensweise und damit Öffnung des Mathematikunterrichts ist kein Privileg für die Förderung begabter Schüler, sie sollte in allen Alters- und Schulstufen im Mathematikunterricht Beachtung finden.

Die oben gestellte Frage „Was kann die Geometrie noch bieten?“ hat mit der Betrachtung des geometrischen Themas „Der Fermatpunkt – eine Erweiterung der Schulgeometrie“ eine exemplarische Antwort bekommen, welche die Vielfalt der Geometrie und die Verknüpfungsmöglichkeiten mit allen Bereichen der Mathematik betont.

Literaturverzeichnis

A u t o r e n k o l l e k t i v, Sammlung mathematischer Aufgaben mit Lösungen, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin/ DDR 1976

B a r o n, Gerd, W i n d i s c h b a c h e r, Erich, Österreichische Mathematik-Olympiaden 1970-1989, Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1990

B r e m i s c h e s S c h u l g e s e t z, Senator für Bildung und Wissenschaft (Hrsg.), Bremen 2005

E l s c h e n b r o i c h, Hans-Jürgen, Geometrie beweglich mit Euklid, Dümmler, Bonn 1996

E n g e l, Wolfgang (Hrsg.), Mathematische Olympiade-Aufgaben mit Lösungen, Aulis, Berlin/ DDR 1975

E u k l i d: Die Elemente Teil 1 (Buch I-III), aus dem griechischen übersetzt und herausgegeben von C. Thaer, Akad. Verl.-Ges., Ostwald‘s Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig 1933

G l o s e m e y e r, Martin, H a g a, Tim, Die Fermatpunkte, Seminararbeit Geometrie, Universität Bremen, 2007

G r u s o n, Johann Philipp, Eine geometrische Aufgabe über Minima, Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaft in Berlin, Mathematische Classe 1816/ 17

H o f m a n n, Joseph E., Über die geometrische Behandlung einer Fermatschen Extremwert-Aufgabe durch Italiener des 17. Jhd., in Sudhoffs Archiv 53 (1969), S. 86ff.

H o l l a n d, Gerhard., Geometrie in der Sekundarstufe, Entdecken-Konstruieren-Deduzieren, Franzbecker, Hildesheim/ Berlin 2007

K r a t z, Johannes, Beziehungsreiche geometrische Problemstellungen aus didaktischer Sicht, in Didaktik der Mathematik 16 (1988), Heft 3, S. 206-234

K r a u t h a u s e n, Günter, S c h e r e r, Petra, Einführung in die Mathematikdidaktik, Elsevier, Hamburg/ Bielefeld 2004

M a t h e m a t i k – O l y m p i a d e n e. V., Die 45. Mathematik-Olympiade 2005/ 2006, Hamburg 2006

M a t h e m a t i k R a h m e n p l a n für die Sekundarstufe I, Senator für Bildung und Wissenschaft (Hrsg.), Bremen, 2001

M ü l l e r – P h i l i p p , Susanne, G o r s k i, Hans-Joachim, Leitfaden Geometrie, Vieweg, Münster 2005

W e t h, Thomas, Kreatives Lernen im Geometrieunterricht, in Hischer, H., (Hrsg.) Tagungsband 1996 des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik", Franzbecker, Hildesheim, 1997, S. 79-87

W e t h, Thomas, Was bringt der Computer „wirklich“ Neues für den Geometrieunterricht?, in Hischer, H., (Hrsg.) Tagungsband 1996 des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik", Franzbecker, Hildesheim 1998, S. 13-21

Internet

http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/minimum/index.html, Peter Baptist, Über ein Extremwertproblem aus der Dreiecksgeometrie-historische und schulgeometrische Betrachtungen, 16. April 2008

www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/gzmadi/gzmadi.html, Alfred Schreiber, Computer im Mathematikunterricht, in Grundzüge der Mathematikdidaktik, Kapitel 11, 10. April 2008

http://lexikon.meyers.de, Satz und Definition vom Tangentenviereck, 17. April 2008

www.mathematische-basteleien.de, 28. März 2008 www.olympiade-mathematik.de, Aufgabe 021216, 17. April 2008

http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/wims/standort/kap6_1_1.htm, Standortplanung im Mathematikunterricht, Kapitel 6, 17. April 2008

Anhang 1: Weitere Informationen zu GeoGebra

Erfinder und Entwickler der **Geo**metrie, Al**gebra** und Analysis–Software GeoGebra ist Markus Hohenwarter. Im Rahmen seiner Diplomarbeit an der Universität Salzburg entstand 2001 die erste Version des Programms, das 2002 den European Academic Software Award (EASA 2002) gewann. Spätere Versionen des Programms gewannen weitere internationale Preise.

GeoGebra ist ein Java-basiertes Programm, das unter Windows, Linux, Solaris und Mac OS X läuft. Jede Konstruktion kann als Webseite exportiert werden (html). Die Software ist frei, d.h. es fallen keine Lizenzkosten an.

Geogebra kann im Internet heruntergeladen werden (www.geogebra.org). Die einzige System-Voraussetzung für die Benutzung von GeoGebra ist die Installation von Java 1.4.2 oder höher. Die Hersteller empfehlen die Benutzung von GeoGebra WebStart, das sich bei bestehender Internetverbindung selbst aktualisiert. So wird immer mit der aktuellsten Version gearbeitet, die auch die Neuerungen von Pre-Release-Versionen beinhaltet. Zur Benutzung der Version muss nicht zwingend das Internet zur Verfügung stehen. Eine weitere Möglichkeit der Nutzung ist die lokale Installation des Programms. Darüber hinaus kann GeoGebra als Applet auf einer html benutzt werden.

Anhang 2: Weitere Informationen zu Pierre de Fermat

Lange Zeit ging man davon aus, dass der studierte Rechtswissenschaftler und Hobbymathematiker Pierre de Fermat am 17. August 1601 geboren wurde. Neuen Erkenntnissen zu Folge erwies sich die Annahme jedoch als Irrtum. Am 20. August 1601 wurde ein Halbbruder von Pierre de Fermat auf den Namen „Pierre Fermat" getauft. Er starb sehr früh. Der als Mathematiker in die Geschichtsbücher eingegangene Pierre de Fermat wurde Ende 1607 oder Anfang 1608, einige Quellen datieren die Geburt auf November 1607, in dem Ort Beaumont-de-Lomagne in Südfrankreich geboren.

Am 12. Januar 1665 starb de Fermat in Castres in der Nähe von Toulouse, wo er der Verhandlungskommission des königstreuen Parlaments angehörte.

Anhang 3: Informationen zur beiliegenden CD-ROM

Die beiliegende CD-ROM enthält die folgenden Ordner mit Inhalten:

Arbeitsblätter

- Zu Kapitel 5.2
- Zu Kapitel 7.5
- Zu Kapitel 7.6

Der Fermatpunkt – eine Erweiterung der Schulgeometrie

- Vorliegende Examensarbeit im pdf-Format

GeoGebra

- Installationsdateien für Mac OS X, Windows, Linux und andere Betriebssysteme

Lösungsskizzen

- Zu Kapitel 3.2
- Zu Kapitel 4.2
- Zu Kapitel 4.3
- Zu Kapitel 5.3