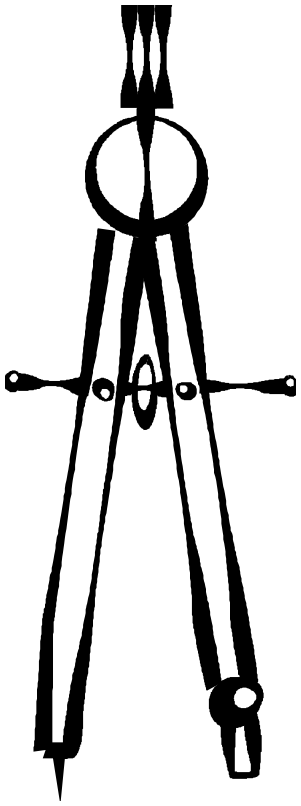

Das Sehnen- & Tangentenviereck

Geometrie-Ausarbeitung

Sarah Schultze & Jakob Priwitzer
2083686 & 2083267

Vorwort

Diese Ausarbeitung wurde im Rahmen der Geometrie-Vorlesung (VAK 03-220) von Prof. Dr. Albers & Prof. Dr. Peitgen im Sommersemester 2007 an der Universität Bremen im Fachbereich 03 Mathematik/Informatik erstellt und dient zur Unterstützung des von den Autoren gehaltenen Vortags vom 2. Juli 2007.

Thema sind das Sehnen- sowie das Tangentenviereck, welche mittels der dynamischen Lernsoftware GeoGebra, die im Internet unter der Adresse www.geogebra.at freizugänglich ist, untersucht werden.

Grundlage der Ausarbeitung ist der Inhalt der bereits erwähnten Geometrie-Vorlesung, wobei insbesondere die Sätze zur Kongruenz, Ähnlichkeit und dem Flächeninhalt von Dreiecken, sowie dem Peripherie-Winkel-Satz vorauszusetzen sind.

Ein häufig verwendeter Begriff ist die Supplementarität zweier Winkel, welche die Eigenschaft beschreibt, dass diese sich zu 180° ergänzen.

Viel Spaß beim Lesen wünschen

Sarah Schultze & Jakob Priwitzer Bremen, den 15.08.2007

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2

Das Sehnenviereck

1. Definition 5
1.1 Selbstversuch 5
2. Veranschaulichung 5
3. Konstruktion 6
4. Eigenschaften im Sehnenviereck 6
4.1 Winkelsatz 6
4.1.1 Beweis 7
4.2 Sehnensatz 7
4.2.1 Beweis 8
4.3 Geschichtlicher Hintergrund über Claudius Ptolemäus 8
4.3.1 Satz des Ptolemäus 9
4.3.2 Beweis 9
4.4 Satz über ein Rechteck im Sehnenviereck 11
4.5 Satz über supplemente Winkel 12
4.6 Satz über das Teilen von gegenüberliegenden Seiten 12
5. Anhang zum Sehnenviereck 13
5.1 Beweis zur Konstruktion eines Sehnenvierecks mittel eines beliebigen Vierecks 13
5.2 Beweis zum Satz über supplemente Winkel (4.5) 14
5.3 Beweis zum Satz über das Teilen von gegenüberliegenden Seiten (4.6) 14

Das Tangentenviereck

6. Definition 15
7. Veranschaulichung 15
8. Konstruktion 15
9. Besondere Tangentenvierecke 16
10. Eigenschaften im Tangentenviereck 17
10.1 Eigenschaft der Seitenlängen 17

10.2 Satz über Flächeninhalte ... 17
10.2.1 Beweis ... 18
10.3 Satz über den Flächeninhalt ... 18
10.3.1 Beweis ... 18
10.4 Eigenschaft der Winkel am Inkreismittelpunkt ... 19
10.5 Eigenschaft über Winkel der Berührungssehnen ... 19
10.6 Eigenschaft über Schnittpunkte ... 19
10.7 Satz: Newtonsche Gerade ... 20
10.7.1 Beweis ... 20
10.8 Satz über Berührungspunkte der Inkreise ... 21
10.8.1 Beweis ... 21
11. Anhang zum Tangentenviereck ... 22
11.1 Satz über die Längen gegenüberliegender Seiten ... 22
11.1.1 Beweis ... 22
11.2 Supplementär-Winkel-Satz ... 23
11.2.1 Beweis ... 23
11.3 Satz über die Berührungssehnen ... 23
11.3.1 Beweis ... 24
11.4 Satz über Schnittpunkte ... 24
11.4.1 Beweis ... 24

Das Sehnen-Tangenten-Viereck

12.1 Einleitung ... 26
12.2 Beispiel ... 26
12.3 Satz ... 26
12.3.1 Beweis ... 27
12.4 Konstruktion ... 27
13. Literaturnachweis ... 28

Das Sehnenviereck

1. Definition

Ein Viereck, das einen Umkreis besitzt, nennt man ein Sehnenviereck.
Anders ausgedrückt ist ein Sehnenviereck ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dem Umkreis des Vierecks. Folglich sind alle Seiten des Sehnenvierecks Sehnen des Umkreises.

Diese Definition schließt auch überschlagene Vierecke ein. In dieser Ausarbeitung wird stets davon ausgegangen, dass ein konvexes Sehnenviereck vorliegt.

1.1 Selbstversuch

Anhand dieser Definition soll nun versucht werden, selbst ein Sehnenviereck zu erstellen. Hierzu dient der folgende Link, in dem man die vier Eckpunkte $ABCD$ des vorgegebenen Vierecks verschieben kann, bis ein Sehnenviereck erstellt ist. Definition.ggb

Zur Überprüfung dient folgende Zeichnung: Definition-Überprüfung.ggb

2. Veranschaulichung

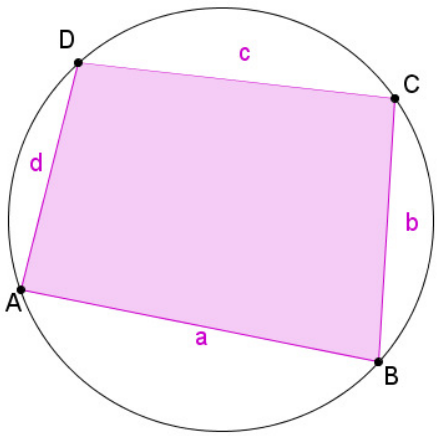

Abbildung 1 Allgemeines Sehnenviereck

3. Konstruktion

Am einfachsten lässt sich ein Sehnenviereck konstruieren, indem man auf einen beliebigen Kreis vier Punkte wählt und diese miteinander verbindet. (Vergleiche Abb. 1)

Eine andere Möglichkeit ein Sehnenviereck zu konstruieren, ergibt sich, indem man ein beliebiges Viereck $ABCD$ betrachtet und die vier Winkelhalbierenden einzeichnet. Es ergeben sich vier Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden, die nun wiederum ein Viereck erzeugen. Bei diesem neu entstandenen Viereck handelt es sich um ein Sehnenviereck A_1, B_1, C_1, D_1. Der Beweis hierzu befindet sich im Anhang (5.1) .

Zur Veranschaulichung dieser Konstruktion dient der folgende Link:
Konstruktions_Veranschaulichung_2.ggb

4. Eigenschaften im Sehnenviereck

Im Folgenden sollen die Winkel im Sehnenviereck erkundet werden. Hierzu soll nun zunächst selbstständig die folgende Datei betrachtet werden. Was fällt auf ? Winkelsatz.ggb

Zu erkennen ist die nachfolgende Schlussfolgerung, die als Winkelsatz formuliert werden kann.

4.1 Winkelsatz

In einem Sehnenviereck ist die Summe der Größen gegenüberliegender Innenwinkel stets 180°.

Daraus folgt, dass $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \gamma = 180°$ gilt.

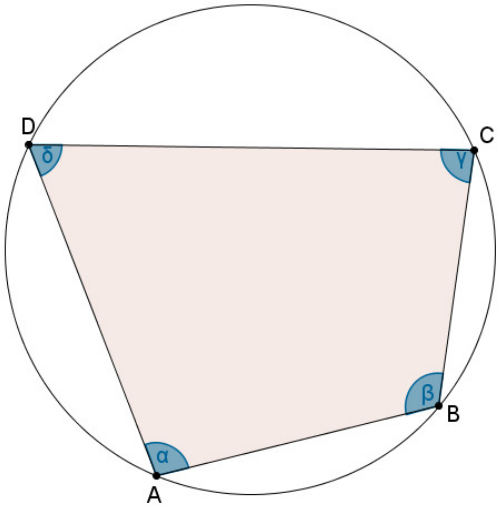

Abbildung 2 Veranschaulichung des Winkelsatzes

4.1.1 Beweis

Betrachtet werden soll das nebenstehende Sehnenviereck mit seinem Umkreis. Ziehen wir von dessen Mittelpunkt O Verbindungslinien zu den Eckpunkten, so entstehen vier gleichschenklige Dreiecke AOB, BOC, COD und DOA, deren gleich lange Schenkel die Länge R haben. Wobei R der Radius des Umkreises vom Sehnenviereck $ABCD$ ist. Daraus folgt nun, dass die zugehörigen Basiswinkel in jedem dieser Dreiecke gleich groß sind:

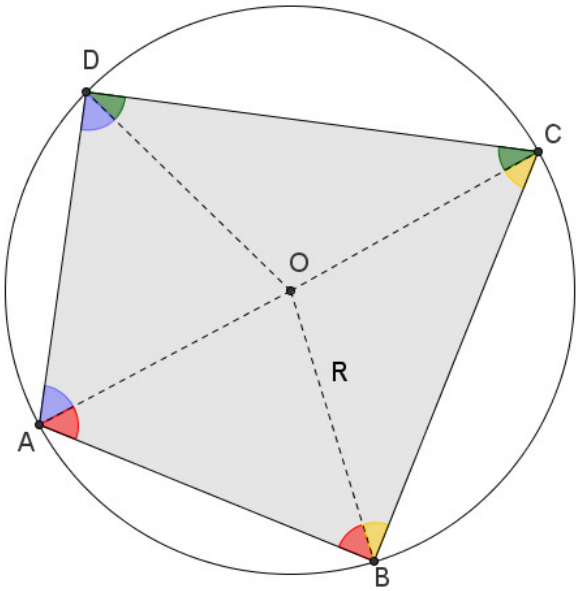

Abbildung 3 Beweisskizze

$\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = rot$; $\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = gelb$;

$\measuredangle OCD = ODC = grün$; $\measuredangle ODA = \measuredangle OAD = blau$

Anhand des Bildes lässt sich ablesen, dass die Winkelsumme im Sehnenwinkel aus $2(rot + gelb + grün + blau) = 360°$ besteht.

Daraus folgt, dass $rot + gelb + grün + blau = 180°$ ist.

Dies ist die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel. ■

4.2 Sehnensatz

Die beiden Diagonalen e und f eines Sehnenvierecks teilen das Sehnenviereck in vier Teildreiecke. Es gilt: Je zwei gegenüberliegende Dreiecke sind zueinander ähnlich.

In nebenstehendem Beispiel würde dies bedeuten, dass die Dreiecke ΔASD und ΔBSC zu einander ähnlich sind. Sowie die Dreiecke ΔASB und ΔCSD.

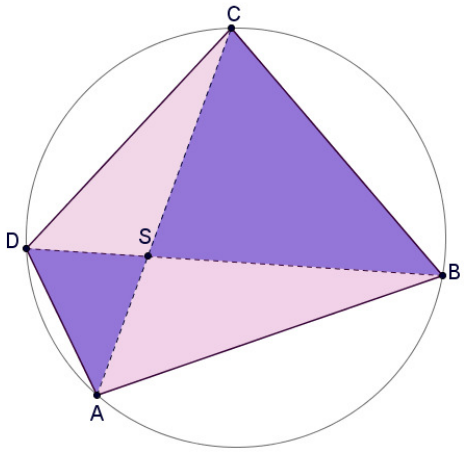

Abbildung 4
Veranschaulichung des Sehnensatzes

4.2.1 Beweis

Für diesen Beweis sollen die Dreiecke ΔABS sowie ΔDCS betrachtet werden und ihre Ähnlichkeit gezeigt werden. Der Beweis für die Dreiecke ΔASD und ΔBSC ergibt sich analog.

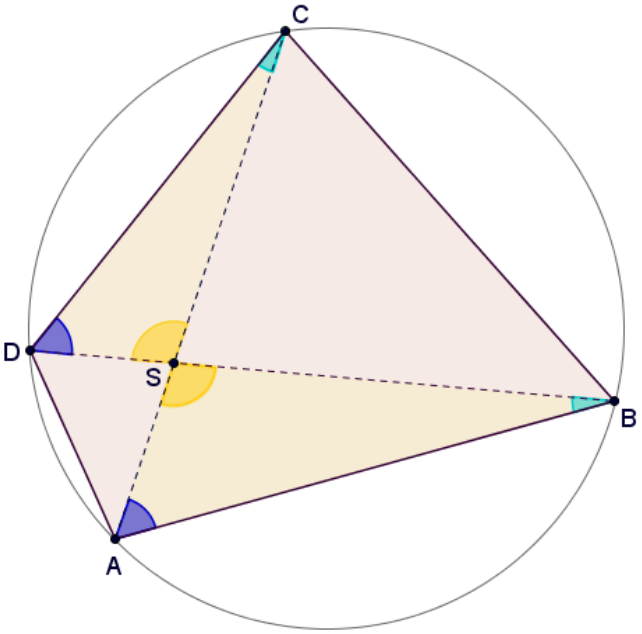

Abbildung 5 Beweisskizze

S soll der Schnittpunkt der Diagonalen sein. Es genügt zu zeigen, dass die betrachteten Dreiecke in allen drei Winkeln übereinstimmen. Für die Winkel $\measuredangle ASB = \measuredangle DSC$ ist dies der Fall, da sie Scheitelwinkel sind. $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ bzw. $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ gilt, da diese jeweils gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AD}$ sind. ■

4.3 Geschichtlicher Hintergrund über Claudius Ptolemäus

Eine weitere Eigenschaft, welche Sehnenvierecke besitzen, wurde von Ptolemäus formuliert, über dessen Leben wenig bekannt ist. Man weiß jedoch, dass er etwa im Jahr 87 n. Chr. im ägyptischen Alexandria geboren ist und sich der mathematischen und astronomischen Wissenschaft zuwandte, die er wesentlich mitbegründete. Zudem schuf er das Standardwerk der Astronomie für das gesamte Mittelalter hindurch und untermauerte die Theorie, wonach die Erde der feste Mittelpunkt des Weltalls sei. Um sie kreisten nach seiner Auffassung alle anderen Himmelskörper. Weiterhin beschäftigte sich Ptolemäus mit Musiktheorie und optischen Experimenten zur Lichtbrechung. Er starb letztlich etwa im Jahr 150 in Alexandria.

Als Motivation für seinen Satz, soll die folgende Anschauung dienen, die im Selbststudium untersucht werden soll. Ptolemäus Anschauung.ggb

Nach dieser Einführung soll nun Ptolemäus Satz und dessen Beweis angeführt werden.

4.3.1 Satz des Ptolemäus

In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalenlängen: $ef = ac + bd$

4.3.2 Beweis

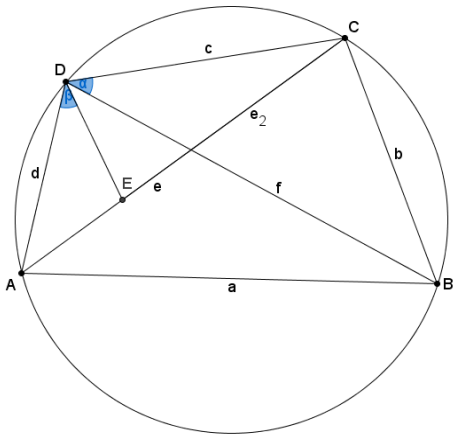

Abbildung 6 Konstruktion des Hilfspunktes

Für diesen Beweis benötigt man zunächst einen Hilfspunkt E bzw. eine Hilfsstrecke $\overline{DE}$.

Dieser/Diese ergibt sich, wenn man den Winkel α, der zwischen der Diagonalen f und der Seite c liegt in D abträgt. Man erhält den Winkel $\beta = \alpha$ und somit E bzw. $\overline{DE}$.

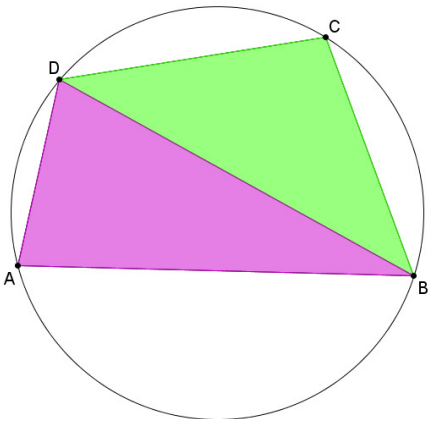

Abbildung 7

Unterteilung des Sehnenvierecks durch eine Diagonale

Nun zerteile die Diagonale $\overline{BD}$ das Sehnenviereck in zwei Dreiecke (die hier farbig gekennzeichnet sind).

Zu diesen Dreiecken gibt es zwei ähnliche Dreiecke.

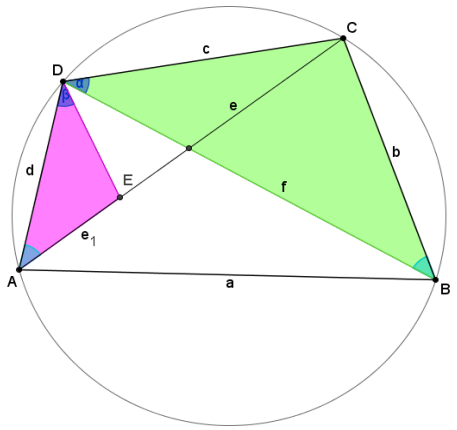

Abbildung 8 Ähnliches Dreieck zu ΔBCD

Das Dreieck ΔAED ist dem Dreieck ΔBDC ähnlich, denn die Dreiecke stimmen in zwei Winkelgrößen überein.

1. $\alpha = \beta$, nach Voraussetzung
2. Die türkisenen Winkel sind gleich groß, da dies Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{CD}$ sind.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt die Proportion $\frac{e_1}{d} = \frac{b}{f}$ oder $e_1 f = bd$.

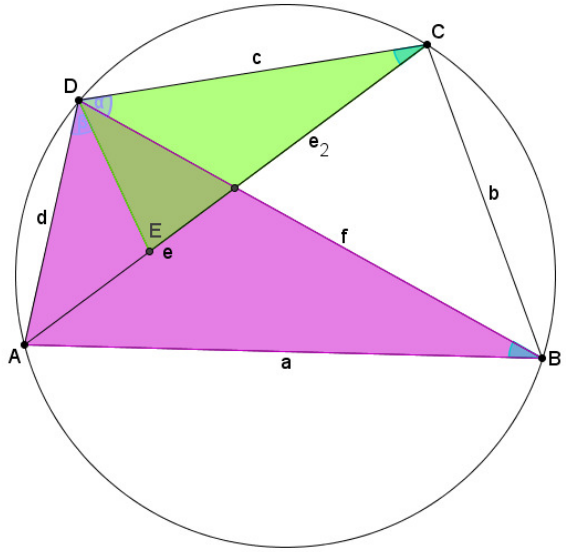

Abbildung 9 Ähnliches Dreieck zu ABD

Das Dreieck ΔABD ist dem Dreieck ΔECD ähnlich, denn die Dreiecke stimmen in zwei Winkelgrößen überein.

1. Die Winkel in D sind gleich groß, da beide Winkel von oben um den gleichen Winkel $\measuredangle BDE$ verringert wurden.
2. Die türkisenen sind gleich groß, da sie Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$ darstellen.

Somit sind diese beiden Dreiecke ähnlich und es lässt sich die Beziehung $\frac{e_2}{c} = \frac{a}{f}$ herstellen. Anders ausgedrückt, ergibt sich $e_2 f = ac$.

Addiert man beide Seiten der Produktgleichungen, so ergibt sich

$e_1 f + e_2 f = bd + ac$ oder

$ef = bd + ac$ ■

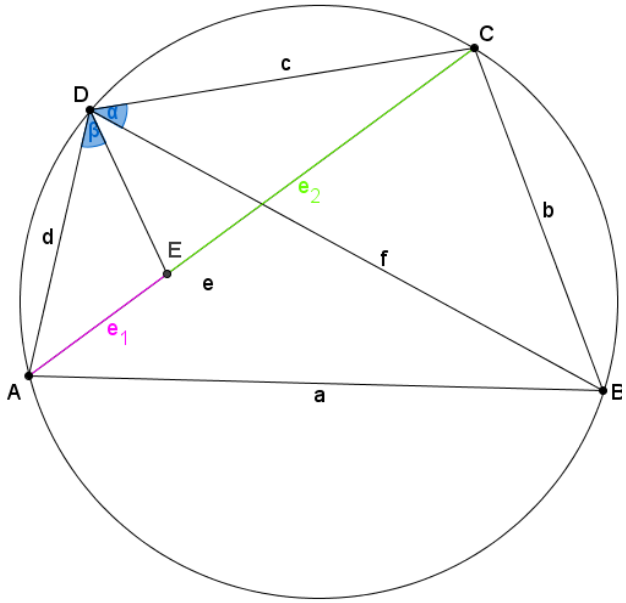

Abbildung 10 Darstellung der Beziehung zwischen den Diagonalenabschnitten

Der Satz ist <u>umkehrbar:</u>

Gilt in einem Viereck die Beziehung $ef = ac + bd$ so liegen die Eckpunkte des Vierecks auf einem Kreis und das Viereck ist ein Sehnenviereck.

4.4 Satz über ein Rechteck im Sehnenviereck

Jede Diagonale teilt das Sehnenviereck in zwei Teildreiecke auf, so dass insgesamt vier Teildreiecke entstehen. Verbindet man die Mittelpunkte der vier Inkreise dieser vier Teildreiecke, so ergibt sich ein Rechteck.

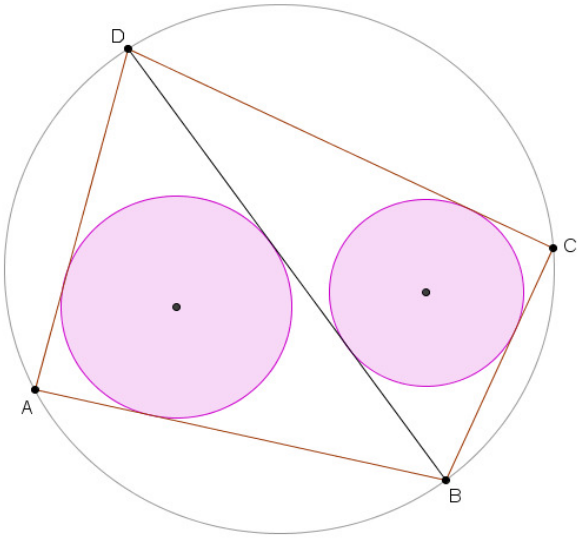

Abbildung 11 Innenkreise der Dreiecke ΔABD und ΔBCD

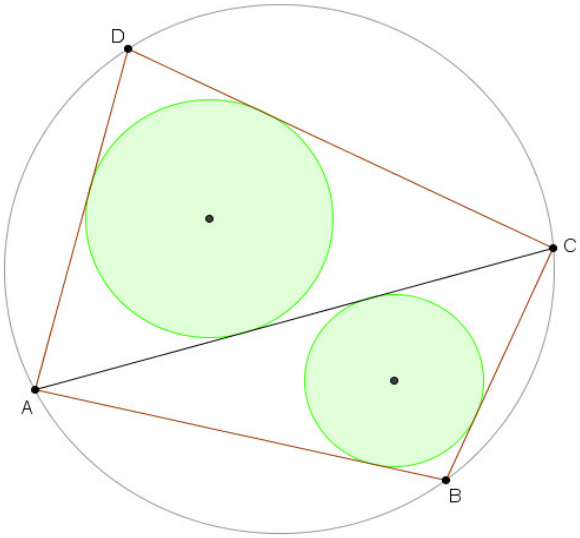

Abbildung 12 Innenkreise der DreieckeΔABC und ΔACD

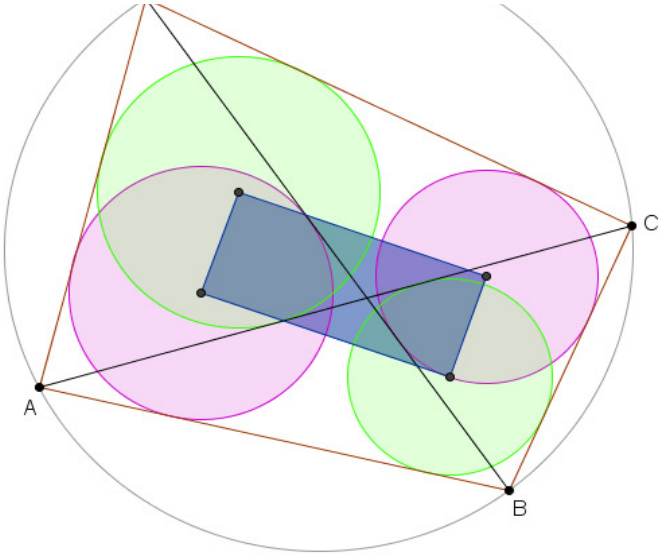

Abbildung 13 Darstellung des entstehenden Rechtecks

4.5 Satz über supplemente Winkel

O sei der Mittelpunkt des Umkreises in einem Sehnenviereck $ABCD$. Stehen in ihm die Diagonalen e und f senkrecht aufeinander, sind die Winkel $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle COD$ supplementär.

Dies soll zum besseren Verständnis durch folgenden Link Supplementarität.ggb untermauert werden. (Beweis siehe Anhang 5.2)

Bevor der Satz über das Teilen von gegenüberliegenden Seiten formuliert wird, soll zunächst auf den folgenden Link verwiesen werden, der zur ersten Erkundung am Objekt einlädt. Seitenteilung.ggb

4.6 Satz über das Teilen von gegenüberliegenden Seiten

Stehen in einem Sehnenviereck die Diagonalen senkrecht aufeinander, so halbiert jede Gerade, die senkrecht auf einer Seite steht und durch den Diagonalenschnittpunkt geht, die jeweils gegenüberliegende Seite. (Beweis siehe Anhang 5.3)

5. Anhang zum Sehnenviereck

5.1 Beweis zur Konstruktion eines Sehnenvierecks mittel eines beliebigen Vierecks

(aus 3. Konstruktion)

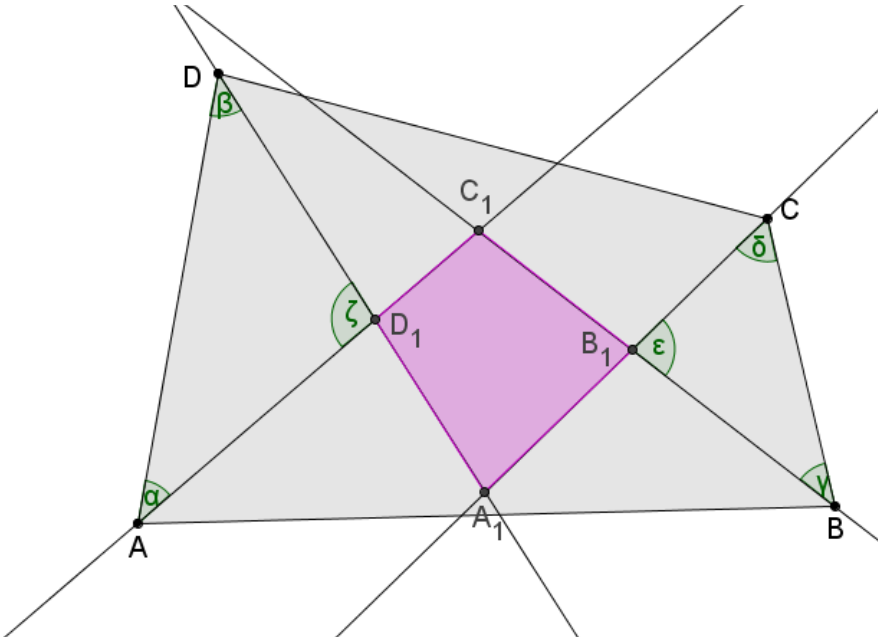

Abbildung 14 Beweisskizze

Zu beweisen ist, dass ein Sehnenviereck entsteht, wenn man in ein beliebiges Viereck die Winkelhalbierenden einzeichnet.

Es ist also zu zeigen, dass zwei Gegenwinkel des Vierecks eine Summe von 180° besitzen (Eigenschaft eines Sehnenvierecks 4.1).

Dazu betrachtet man zunächst die Dreiecke AD_1D und BB_1C. Der Winkel ς ergibt sich dabei zu $180° - \alpha - \beta$. Der Winkel ε zu $180° - \gamma - \delta$. Diese Winkel sind Scheitelwinkel zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$. Addiert man sie, erhält man $360° - (\alpha - \beta - \gamma - \delta) = 180°$.

($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, bedingt durch die Winkelhalbierenden). ■

5.2 Beweis zum Satz über supplemente Winkel (4.5)

Der Schnittpunkt der Diagonalen des Sehnenvierecks sei mit S bezeichnet. O sei der Mittelpunkt des Umkreises in dem Sehnenviereck $ABCD$. Daraus folgt, dass $\sphericalangle AOB$ als Zentriwinkel über der Sehne $\overline{AB}$ doppelt so groß ist, wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle SCB$.

Weiter gilt $\sphericalangle COD = 2\sphericalangle CBD = 2\sphericalangle CBS$.
Nach Voraussetzung ist das Dreieck ΔBCS rechtwinklig. Damit folgt:

$$90° = \sphericalangle SCB + \sphericalangle CBS = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD)$$

Und daraus die Behauptung**.** ■

Übernommen aus [2] (siehe Literaturnachweis)

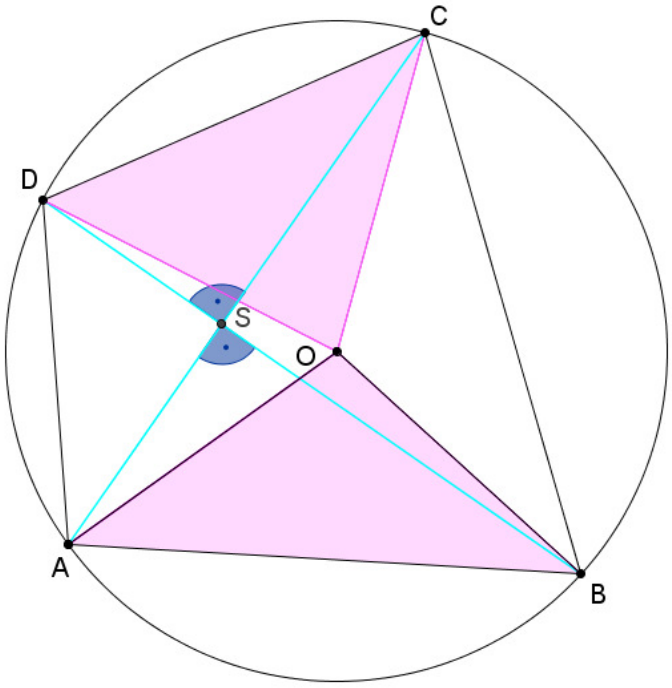

Abbildung 15 Beweisskizze

5.3 Beweis zum Satz über das Teilen von gegenüberliegenden Seiten (4.6)

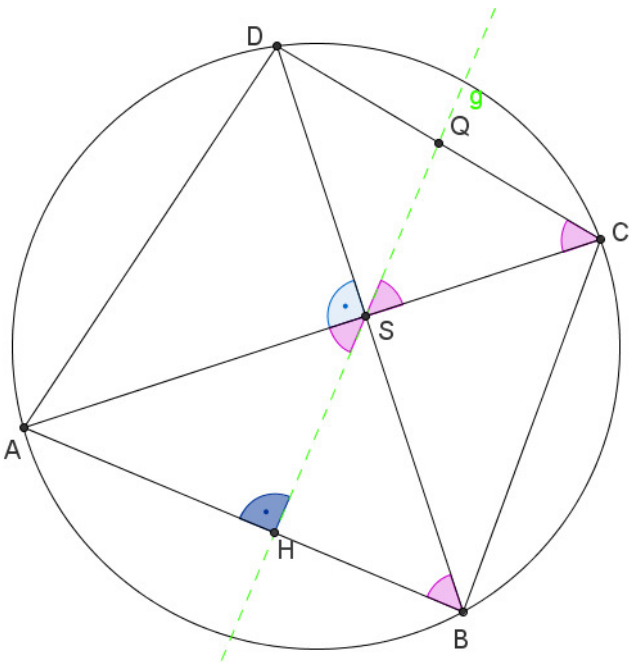

Abbildung 16 Beweisskizze

$\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sollen die sich senkrecht in S schneidenden Diagonalen des Sehnenvierecks $ABCD$ sein. Die Gerade g, die durch H und S verläuft und senkrecht zu $\overline{AB}$ steht, schneide $\overline{CD}$ in Q. Dann sind ΔASH und ΔABS ähnliche Dreiecke und es gilt:
$\sphericalangle CSQ = \sphericalangle ASH = \sphericalangle ABS = \sphericalangle ACD = \sphericalangle SCQ$.
Somit ist ΔSQC gleichschenklig.

Analog zeigt man, dass ΔSQD gleichschenklig ist.
Also ist $QC = QS = QD$. ■

Das Tangentenviereck

6. Definition

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind. Diesen Kreis nennt man den Inkreis des Tangentenvierecks.

7. Veranschaulichung

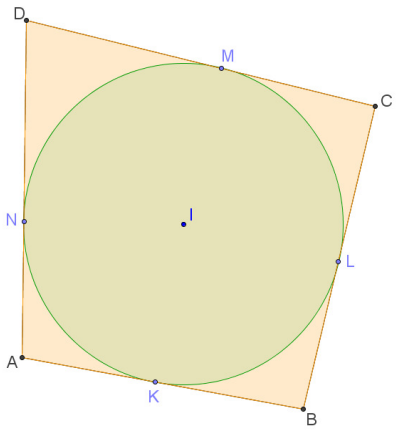

Abbildung 17 Tangentenviereck

Dieses Beispiel eines Allgemeinen Tangentenvierecks $ABCD$ mit den hier gewählten Bezeichnungen soll im weiteren Verlauf der Ausarbeitung als Muster dienen.

Die Berührungspunkte K, L, M, N des Tangentenvierecks mit dem Inkreis werden als Lotfußpunkte bezeichnet, da sie die Fußpunkte der Lote, auf den Seiten, durch den Inkreismittelpunkt I sind.

8. Konstruktion

Beim Dreieck wird der Inkreis über die Winkelhalbierenden konstruiert, die sich in dem Inkreismittelpunkt schneiden. Auch im Tangentenviereck schneiden sich die Winkelhalbierenden, aus dem gleichen Grund wie beim Dreieck, im Inkreismittelpunkt. Auch hier ließen sich also in ein allgemeines Viereck die Winkelhalbierenden einzeichnen und dann durch Verschiebung der Eckpunkte die Winkelhalbierenden zum Schnitt bringen. Dies ist jedoch selbst mit GeoGebra nur sehr schwer zu realisieren.

Am einfachsten lässt sich ein Tangentenviereck konstruieren, indem man zuerst einen Kreis zeichnet und sich dann vier Punkte auf diesem Kreis wählt, an denen die Tangenten angelegt werden. Die vier Schnittpunkte der Tangenten bilden die Eckpunkte des Tangentenvierecks.

Folgender Link demonstriert die einzelnen Konstruktionsschritte, die man sich anzeigen lassen kann, wenn man auf „Abspielen“ drückt.

Konstruktion Tangentenviereck.ggb

Bemerkung: Auf Grund der Konstruktion lässt sich das Tangentenviereck über die Lotfußpunkte K, L, M und N dynamisch verändern. Der Hilfspunkt H hingegen spannt den Inkreis auf und ändert das Viereck nur in seinem Maßstab, aber nicht in seiner Form, so dass im Weiteren dieser Punkt H aus der Konstruktion ausgeblendet wird.

9. Besondere Tangentenvierecke

Zu den besonderen Tangentenvierecken gehören die bereits bekannten Vierecke:

Quadrat

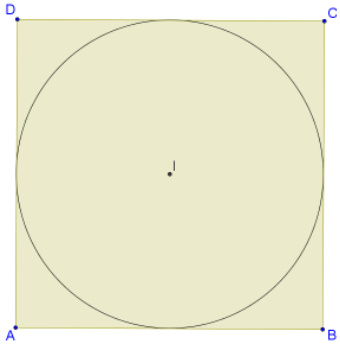

Abbildung 18 Quadrat

Drachen

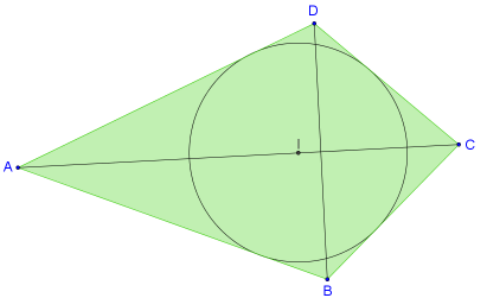

Abbildung 20 Drachen

Raute

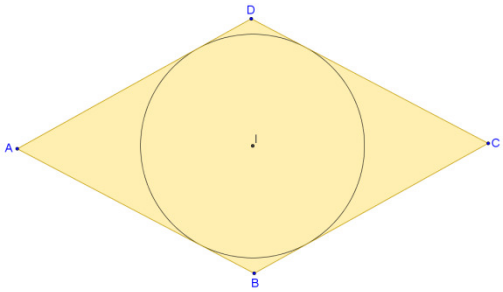

Abbildung 19 Raute

10. Eigenschaften im Tangentenviereck

Da das Tangentenviereck durch seinen Inkreis ein besonderes Viereck ist, können auch besondere Eigenschaften aufgezeigt werden, die zum Teil recht verblüffend sind.

Einige Eigenschaften lassen sich dank Geogebra relativ leicht selbst entdecken. Deshalb werden im Folgenden nicht alle Eigenschaften direkt benannt, sondern die Möglichkeit geben, diese selber zu erkunden. Die entsprechenden Sätze sind dann im Anhang noch einmal mit Beweis für konvexe Tangentenvierecke aufgeführt.

10.1 Eigenschaft der Seitenlängen

Zu Beginn werden die Seitenlängen des Tangentenvierecks $ABCD$ betrachtet, die wie üblich mit $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ und $\overline{DA} = d$ bezeichnet werden. Welche Besonderheit fällt auf, wenn man diese Seitenlängen in dem folgenden Link dynamisch betrachtet?

Tangentenviereck Seitenlängen.ggb (Satz u. Beweis, siehe Anhang 11.1)

10.2 Satz über Flächeninhalte

Ein Tangentenviereck $ABCD$ mit dem Inkreismittelpunkt I lässt sich in vier Dreiecke ΔABI, ΔCDI, ΔBCI und ΔDAI einteilen. Für die Flächeninhalte dieser Dreiecke gilt:

$$[ABI] + [CDI] = [BCI] + [DAI]$$

10.2.1 Beweis

Betrachtet man die Seiten des Tangentenvierecks jeweils als Grundseite der Dreiecke ΔABI, ΔCDI, ΔBCI und ΔDAI, so haben diese alle die gleiche Höhe, nämlich den Radius r des Inkreises.

Somit ergibt sich die Behauptung aus dem Satz über die Seitensummen (siehe Anhang 11.1) und der Berechnung des Flächeninhaltes:

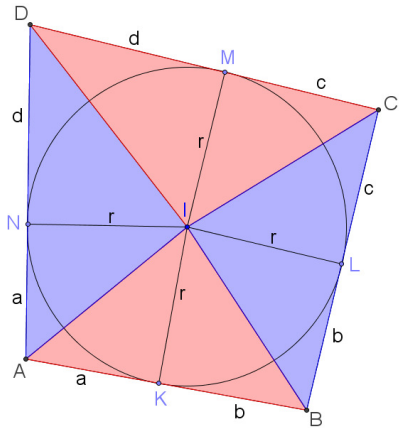

Abbildung 21 Beweisskizze

$$[ABI] + [CDI] = \frac{1}{2}(a+b)\cdot r + \frac{1}{2}(c+d)\cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\cdot r = [BCI] + [DAI] \quad \blacksquare$$

10.3 Satz über den Flächeninhalt

Nachdem eine Aussage über die Flächen der Teildreiecke gemacht wurde, folgt jetzt eine Aussage über den Flächeninhalt des gesamten Tangentenvierecks $ABCD$.

Es gilt: $[ABCD] = rs$, wobei s den halben Umfang und r den Inkreisradius des Tangentenvierecks bezeichnet.

10.3.1 Beweis

Die Behauptung ist ein direkter Schluss aus den beiden vorangegangenen Sätzen (vergleiche Abb. 21):

$$[ABCD] = [ABI] + [BCI] + [CDI] + [DAI] \underbrace{=}_{(1)} 2\cdot\left\{\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cdot r\right\}$$

$$= (a+b+c+d)\cdot r \underbrace{=}_{(2)} rs$$

(1) Folgt aus dem Satz über Flächeninhalte, da gilt:

$$[ABI] + [CDI] = \frac{1}{2}(a + b + c + d) \cdot r = [BCI] + [DAI]$$

(2) Folgt aus dem Satz über die Seitensummen

$$s = \frac{U}{2} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA} = a + b + c + d$$ ■

10.4 Eigenschaft der Winkel am Inkreismittelpunkt

Als nächstes werden die Größen der Winkel am Inkreismittelpunkt I betrachtet, die entstehen wenn die Eckpunkte des Tangentenvierecks $ABCD$ mit diesem verbunden werden. Für diese Winkel lässt sich ebenfalls eine Regelmäßigkeit feststellen. Welche?

Tangentenviereck Supplementärwinkel.ggb

(Satz u. Beweis, siehe Anhang 11.2)

10.5 Eigenschaft über Winkel der Berührungssehnen

Verbindet man zwei gegenüberliegende Lotfußpunkte, so wird das Tangentenviereck in zwei neue Vierecke aufgeteilt. Welche Gesetzmäßigkeit ist festzustellen?

Tangentenviereck Winkel.ggb

(Satz u. Beweis, siehe Anhang 11.3)

10.6 Eigenschaft über Schnittpunkte

Im folgenden Link sind die Diagonalen einen Tangentenvierecks, so wie die Strecken der gegenüberliegenden Lotfußpunkte eingezeichnet. Offensichtlich ist auch hier aus der dynamischen Betrachtung eine Regelmäßigkeit zu beobachten. Welche?

Tangentenviereck Schnittpunkt.ggb (Satz u. Beweis, siehe Anhang 11.4)

10.7 Satz: Newtonsche Gerade

Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines Tangentenvierecks, dann liegt der Inkreismittelpunkt I immer auf dieser Verbindungsgeraden, die als Newtonsche Gerade bezeichnet wird.

Zur dynamischen Überprüfung steht folgender Link zur Verfügung: Newtonsche Gerade.ggb

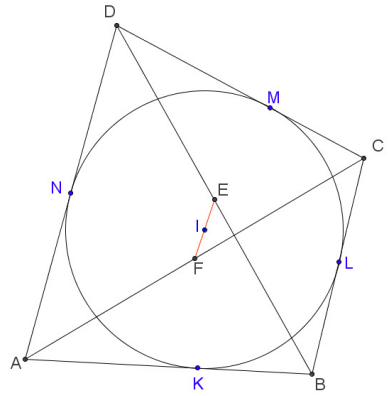

Abbildung 22 Newtonsche Gerade

10.7.1 Beweis

Zunächst wird ein Satz vorausgesetzt, auf dessen Beweis an dieser Stelle verzichtet wird. Er besagt:

In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E und F die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$. Dann liegt ein Punkt P im Innern des Vierecks genau dann auf der Geraden $\overline{EF}$, wenn gilt: $[ABP] + [CDP] = [BCP] + [DAP]$.

Nach dem bereits bekannten Satz über Flächeninhalte gilt für ein Tangentenviereck $ABCD$ gerade die Flächenbeziehung: $[ABI] + [CDI] = [BCI] + [DAI]$. Also ist die eben benannte Bedingung, dass ein Punkt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen liegt, für den Punkt I erfüllt. ■

10.8 Satz über Berührungspunkte der Inkreise

Die Inkreise der Dreiecke ΔABC und ΔCDA eines Tangentenvierecks $ABCD$ berühren sich in einem Punkt.

Zur Überprüfung folge man dem Link:

Berührungspunkt.ggb

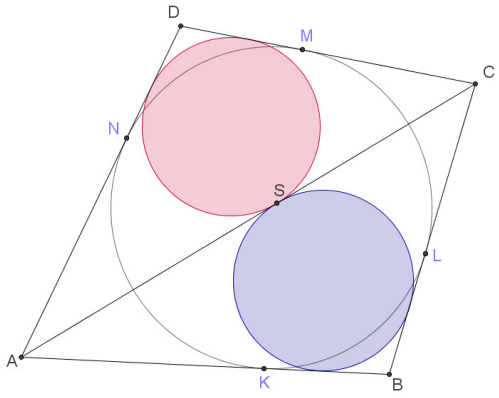

Abbildung 23 Inkreis-Berührungspunkte

10.8.1 Beweis

Zunächst wird ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ betrachtet.

Die Inkreise der Dreiecke ΔABC und ΔCDA mögen die Diagonale durch die Punkte $\overline{AC}$ in den Punkten K bzw. L berühren. Dann gilt für den Abstand $\overline{KL}$ die Beziehung:

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\left|(\overline{AB} + \overline{CD}) - (\overline{BC} + \overline{DA})\right| .$$

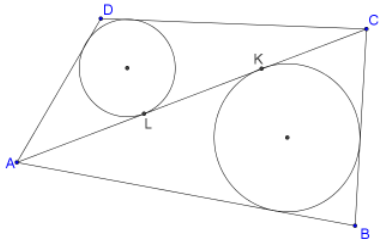

Abbildung 24 Beweisskizze

Diese Beziehung lässt sich über den Satz für den Flächeninhalt eines Dreiecks ΔABC begründen. Er besagt, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich dem Produkt aus dem Inkreisradius r und dem halben Umfang $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist: $[\Delta ABC] = rs$.

Hieraus ergeben sich die Tangentenabschnitte $\overline{AK}$ und $\overline{AL}$ zu

$\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC})$, $\overline{AL} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{DA} - \overline{CD})$ und somit aus dieser Differenz

$$\overline{KL} = \left|\overline{AK} - \overline{AL}\right| = \frac{1}{2}\left|(\overline{AB} + \overline{CD}) - (\overline{BC} + \overline{DA})\right|.$$

Betrachten wir $\overline{KL}$ nun wieder im Tangentenviereck, so gilt wegen dem Satz über die Längen gegenüberliegender Seiten: $\overline{KL} = \frac{1}{2}\left|(\overline{AB} + \overline{CD}) - (\overline{BC} + \overline{DA})\right| = 0$ ■

11.Anhang zum Tangentenviereck

11.1 Satz über die Längen gegenüberliegender Seiten

In einem Tangentenviereck $ABCD$ ist die Summe der Längen der jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich groß, so dass gilt:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$$

11.1.1 Beweis

Seien K, L, M, N die Berührungspunkte der Seiten des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Inkreis, mit dem Mittelpunkt I. Betrachtet man nun ΔAIK und ΔAIN, dann steht der Radius $\overline{IK}$ bzw. $\overline{IN}$ jeweils senkrecht auf den Seiten $\overline{AK}$ bzw. $\overline{AN}$. Die beiden Dreiecke sind also rechtwinklig und teilen sich die längste Seite $\overline{IA}$, die jeweils dem rechten Winkel gegenüber liegt. Somit gilt nach dem Kongruenzsatz SSW, dass die beiden Dreiecke ΔAIK und ΔAIN kongruent sind. Insbesondere sind die Seiten $\overline{AK} = \overline{AN} \equiv a$ gleich lang.

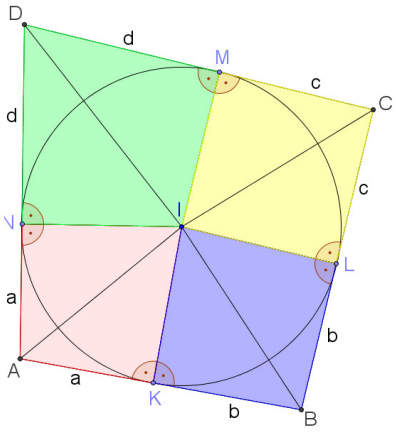

Abbildung 25 Beweisskizze

Analog lässt sich ebenfalls zeigen, dass gilt: $\overline{BK} = \overline{\mathrm{BL}} \equiv b$, $\overline{CL} = \overline{\mathrm{CM}} \equiv c$, sowie $\overline{DM} = \overline{\mathrm{DN}} \equiv d$.

Somit lassen sich die Summen der Längen gegenüberliegender Seiten des Tangentenvierecks nun schreiben als $\overline{AB} + \overline{CD} = a + b + c + d = \overline{BC} + \overline{DA}$ und sind somit offensichtlich gleich groß. ■

(Dieser Satz ist umkehrbar)

11.2 Supplementär-Winkel-Satz

Die Winkel, unter denen gegenüberliegende Seiten vom Inkreismittelpunkt aus gesehen werden, sind supplementär.

Es gilt somit: $\measuredangle AIB + \measuredangle CID = 180° = \measuredangle BIC + \measuredangle DIA$

11.2.1 Beweis

Seien K, L, M, N die Fußpunkte der Lote vom Inkreismittelpunkt I auf die Seiten des Tangentenvierecks. Dann hat man vier Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke vorliegen: $\Delta AIK \cong \Delta AIN$, $\Delta BIL \cong \Delta BIK$, $\Delta CIM \cong \Delta CIL$, sowie $\Delta DIN \cong \Delta DIM$ (jeweils Kongruenzsatz SSW). Mit den Abkürzungen $\measuredangle AIK = \measuredangle AIN \equiv \alpha$, $\measuredangle BIL = \measuredangle BIK \equiv \beta$, $\measuredangle CIM = \measuredangle CIL \equiv \gamma$ und $\measuredangle DIN = \measuredangle DIM \equiv \delta$ erhält man für den Vollwinkel bei I:

$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360°$ oder $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = \measuredangle AIB + \measuredangle CID = 180°$ ■

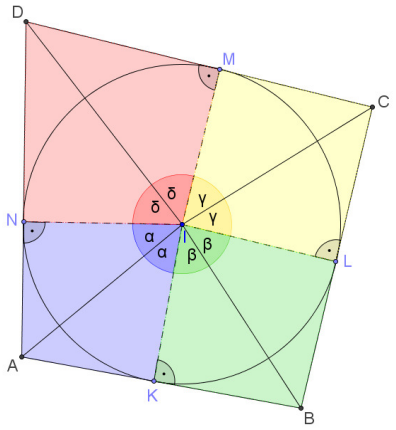

Abbildung 26 Beweisskizze

11.3 Satz über die Berührungssehnen

In einem Tangentenviereck teilt jede Berührungssehne (das ist die Verbindungsstrecke gegenüberliegender Berührungspunkte mit dem Inkreis) dieses in zwei Vierecke mit jeweils paarweise gleichen Winkeln.

Für die Berührungssehne $\overline{KM}$ gilt $\measuredangle BKM = \measuredangle CMK$, sowie für die Sehne $\overline{LN}$ die Gleichheit der Winkelgrößen $\measuredangle CLN = \measuredangle LND$.

11.3.1 Beweis

Zunächst wird die Berührungssehne $\overline{KM}$ betrachtet und die Behauptung $\measuredangle BKM = \measuredangle KMC$ gezeigt.

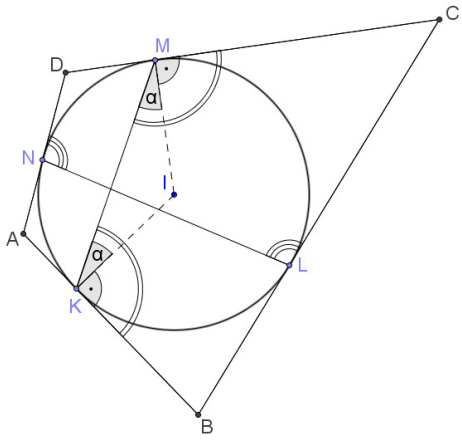

Abbildung 27 Beweisskizze

Da für die Strecken $\overline{IK} = \overline{IM} = r$ gilt, mit r als Inkreisradius, muss das Dreiecke ΔIKM gleichschenklig sein. Sei α nun die Größe dieser gleichen Winkel $\measuredangle KMI$ und $\measuredangle IKM$, dann gilt für die Winkel $\measuredangle BKM = \alpha + \measuredangle BKI$, sowie $\measuredangle KMC = \alpha + \measuredangle IMC$. Die Strecken $\overline{IK}$ und $\overline{IM}$ stehen aber gerade senkrecht auf den Seiten, so dass die Winkel $\measuredangle BKI = \measuredangle IMC = 90°$ sind und somit die Behauptung folgt.

Für die Berührungssehne $\overline{LN}$ wird analog die Behauptung $\measuredangle CLN = \measuredangle LND$ gezeigt. ■

11.4 Satz über Schnittpunkte

Die Diagonalen eines Tangentenvierecks schneiden sich im gleichen Punkt wie die beiden Sehnen gegenüberliegender Berührungspunkte mit dem Inkreis.

11.4.1 Beweis

Sei S der Schnittpunkt der Diagonale $\overline{AC}$ mit der Sehne $\overline{KM}$. Dann haben die Dreiecke ΔAKS und ΔCMS die Winkel in S als Scheitelwinkel, so dass diese die gleiche Größe haben. Darüber hinaus gilt nach dem Satz über die Berührungssehnen, dass die Winkel $\measuredangle SKA$ und $\measuredangle SMC$ supplementär sind ($\measuredangle SKA = 180° - \measuredangle SMC$).

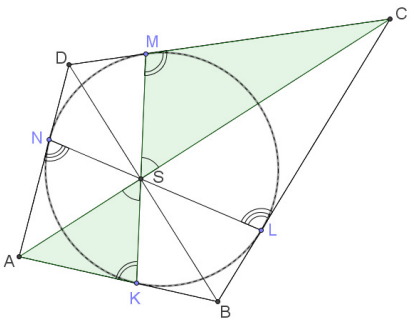

Abbildung 28 Beweisskizze

Mit Hilfe des Sinussatzes folgt daraus wegen

$$\sin(\measuredangle SKA) = \sin(180° - \measuredangle SMC) = \sin(\measuredangle SMC)$$

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CS}}$$

Weiterhin sind $\overline{AK} = \overline{AN}$ und $\overline{CL} = \overline{CM}$ jeweils gleiche Tangentenabschnitte, so dass obige Gleichung zu $\frac{\overline{AK}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AS}}$ (Gleichung 1) erweitert werden kann. In den Dreiecken ΔCLS und ΔANS befinden sich ebenfalls Supplementwinkel: $\measuredangle CLS = 180° - \measuredangle ANS$. Mit dem gleichen Argument unter Verwendung des Sinussatzes folgt aus (Gleichung 1): $\measuredangle ANS$ und $\measuredangle CLS$ sind entweder gleich oder supplementär. Letzteres scheidet aus. Da S auf $\overline{AC}$ liegt, muss S daher auch auf der Sehne $\overline{LN}$ liegen. Analog wird (beginnend mit den Dreiecken ΔBLS und ΔDNS) gezeigt, dass die andere Diagonale ebenfalls durch S geht. ■

12. Das Sehnen-Tangenten-Viereck

12.1 Einleitung

Es gibt Vierecke mit einem Umkreis und Vierecke mit einem Inkreis. Es stellt sich also nun die Frage, ob es auch solche gibt, die sowohl einen In-, wie auch einen Umkreis besitzen. Ein solches Viereck ist ein Sehnenviereck und zugleich ein Tangentenviereck und wird deshalb Sehnen-Tangenten-Viereck genannt.

12.2 Beispiel

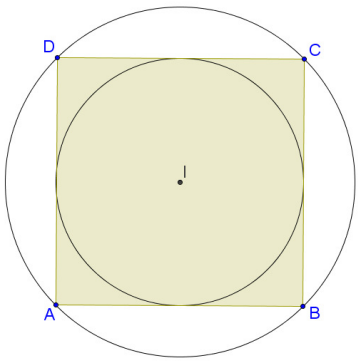

Abbildung 29 Quadrat als Sehnen-Tangenten-Viereck

Das Quadrat, als eine hoch symmetrische Figur, ist ein Sehnen-Tangenten-Viereck. Die beiden Diagonalen, die sich im rechten Winkel schneiden, geben den Mittelpunkt des Um- und Inkreises vor. Dieser Schnittpunkt hat die besondere Eigenschaft, dass er gleichzeitig auch der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist (dies begründet den Inkreis) und zusätzlich noch den selben Abstand zu allen vier Eckpunkten besitzt (Begründung für den Umkreis).

Der folgende Satz wird nun eine Bedingung angeben, die es ermöglicht, weitere Sehnen-Tangenten-Vierecke auch dynamisch zu konstruieren.

12.3 Satz

In einem Sehnen-Tangenten-Viereck stehen die Berührungssehnen zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten senkrecht aufeinander.

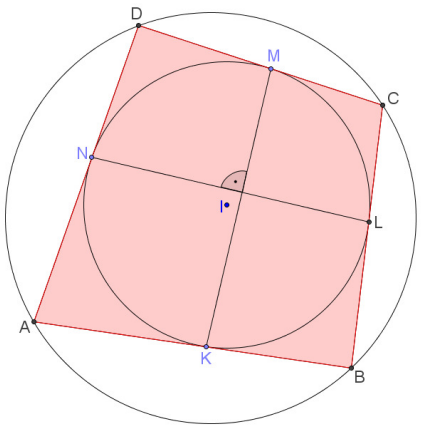

Abbildung 30 Satz 12.3

12.3.1 Beweis

Sei S der Schnittpunkt der beiden Berührungssehnen $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$. Man betrachte nun die beiden Vierecke $AKSN$ und $CMSL$, deren Winkelsumme jeweils 360° beträgt. Nach dem Satz 11.3 über die Berührungssehnen im Tangentenviereck, folgt für die Winkel $\measuredangle SKA + \measuredangle SMC = 180°$ und $\measuredangle CLS + \measuredangle ANS = 180°$, da diese jeweils Supplementwinkel sind.

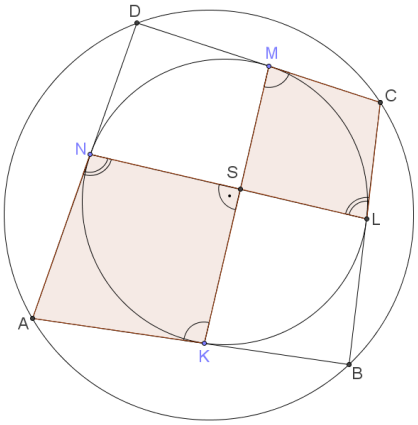

Abbildung 31 Beweisskizze

Für die verbleibenden Winkel in den oben genannten Vierecken, bleibt daher ebenfalls eine Summe von 180°:
$\measuredangle NSK + \measuredangle KAN = 180°$ und $\measuredangle MCL + \measuredangle LSM = 180°$.
Da $\measuredangle KAN$ und $\measuredangle MCL$ aber gerade Supplementwinkel sind (Satz 4.1), muss für die Winkel in S gelten, dass sich diese ebenfalls zu 180° ergänzen, also $\measuredangle NSK + \measuredangle LSM = 180°$. Da es sich hierbei aber gerade um Scheitelwinkel handelt und somit gerade die gleiche Größe haben, handelt es sich um rechte Winkel.
Die beiden Berührungssehnen stehen also senkrecht aufeinander. ■

12.4 Konstruktion

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich jetzt weitere Sehnen-Tangenten-Vierecke auch dynamisch konstruieren.
Zur Vorführung der Konstruktion, bitte dem Link folgen und die einzelnen Schritte abspielen lassen:
S_T_Viereck Konstruktion.ggb

13.Literaturnachweis

[1] http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/var/PV4.html

[2] http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/var/PV3.html

[3] http://www.mathematische-basteleien.de/Sehnenviereck.htm

[4] http://www.mathematische-basteleien.de/Tangentenviereck.htm

[5] http://de.wikipedia.org