Aufgabe 1:

a) Wahrheitstafel:

A	B	C	B oder C	A⇒B oder C	⇔	¬B und ¬C	¬B und ¬C⇒¬A
w	w	w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	f	f	w	w	f
f	w	w	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	w	w
Reihenfolge:			1.	2.	5.	3.	4.

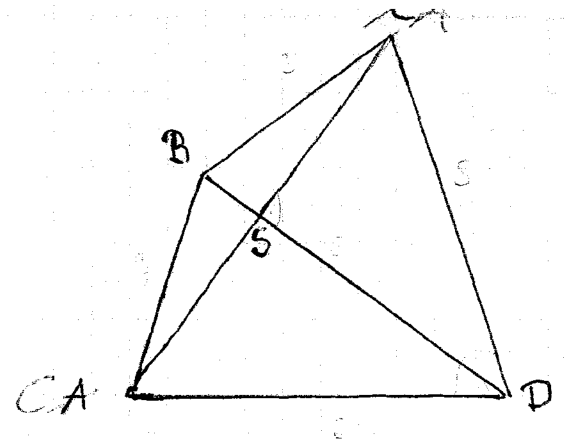
Da sich für die Äquivalenz in Spalte 5. immer w ergibt, ist diese somit gezeigt.

b)

Es müssen nur das A und die 12 umgedreht werden.

Beim A muss die andere Seite eine einstellige Zahl oder eine Zahl mit 4 als Einerziffer aufweisen. Auf der Rückseite der 12 muss ein Konsonant stehen.

2 a)



1 Punkt
(ordentliche Zeichnung)

b) zu zeigen: $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CDB|$

Voraussetzungen:

(1) $|AB| = |BC|$ s. Aufgabe

(2) $|AD| = |CD|$ s. Aufgabe

(3) $|BD| = |BD|$ gleiche Strecken

1 Punkt
(Voraussetzungen begründet notiert)

$\Rightarrow \Delta BDC \cong \Delta ADB$ nach SSS

$\Rightarrow |\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CDB|$

1 Punkt
(Schluss ziehen)

2 Punkte

c) zu zeigen: $|\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle BSA| = 90°$

1. Teil

$|\sphericalangle BDA| = \sphericalangle CDB|$ s. b)

1 Punkt
(richtige Umsetzung in was zu zeigen)

$|AD| = |CD|$ s. Aufgabe

$|SD| = |SD|$ gleiche Strecke

1 Punkt
(richtige Voraussetz. begründet notiert)

$\Rightarrow \Delta ADS \cong \Delta DCS$ nach SWS

$\Rightarrow |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle ASD|$

$|\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle BSC| = 180°$ gestreckter Winkel

$2\,|\sphericalangle CSD| = 180°$

$|\sphericalangle CSD| = 90° = |\sphericalangle ASD|$

1 Punkt
(richtige Schlussfolgerung und Ausrechnen von Gleichung)

1 Punkt Begründung: Gilt auch für anderen beiden Winkel

2. Teil:

$|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD|$, weil $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ s. b)

$|AB| = |BC|$ gleiche Strecke s. Aufgabe

$|BS| = |BS|$

1 Punkt (richtige Voraussetzungen mit Begründung richtig notiert)

$\Rightarrow \Delta ASB \cong BSC$ nach SWS

$\Rightarrow |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC|$

$|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle BSC| = 180°$ gestreckter Winkel

$2|\sphericalangle ASB| = 180°$

$|\sphericalangle ASB| = 90° = |\sphericalangle BSC|$

1 Punkt (richtiger Schluss; Gleichung 180°)

---

5 Punkte

Aufg. 3

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

a) (2 Pkt.)

$$\vec{x'} = B \cdot \vec{x} \qquad \vec{x''} = A \cdot \vec{x'} \quad \Rightarrow \quad \vec{x''} = A \cdot B \cdot \vec{x} \quad 1$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\vec{x''} = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

b) Drehung um O um $\beta \Rightarrow$ Drehmatrix
(3 Pkt)

$$C = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{2}$$

Winkel zwischen den Geraden ist $90-\alpha$ (1) $\Rightarrow$ Drehung um $\beta = 2(90-\alpha)$ ($\tfrac{1}{2}$)

$$C = \begin{pmatrix} \cos(2(90-\alpha)) & -\sin(2(90-\alpha)) \\ \sin(2(90-\alpha)) & \cos(2(90-\alpha)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(180-2\alpha) & -\sin(180-2\alpha) \\ \sin(180-2\alpha) & \cos(180-2\alpha) \end{pmatrix} \quad 1$$

c) Z.Z.: $C = A \cdot B$ $\tfrac{1}{2}$
(3 Pkt)

$$\left.\begin{aligned} \sin(90-\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90-\alpha) &= \sin\alpha \end{aligned}\right\} 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \end{aligned}\right\} 1$$

$\Rightarrow \sin(180-2\alpha) = \sin(90-(2\alpha-90)) = \cos(2\alpha-90) = \cos(90-2\alpha) = \sin(2\alpha)$

$\Rightarrow \cos(180-2\alpha) = \cos(90-(2\alpha-90)) = \sin(2\alpha-90) = -\sin(90-2\alpha) = -\cos(2\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(180-2\alpha) & -\sin(180-2\alpha) \\ \sin(180-2\alpha) & \cos(180-2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{2}$$

oder mit Additionstheoremen: $1 \left\{\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}\right.$

$\sin(180° - 2\alpha) = \sin 180° \cdot \cos 2\alpha - \cos 180° \sin 2\alpha = 0 - (-1)\sin 2\alpha$
$= \sin 2\alpha$

$\cos(180° - 2\alpha) = \cos 180° \cos 2\alpha + \sin 180° \sin 2\alpha$
$= -1 \cdot \cos 2\alpha + 0 = -\cos 2\alpha$

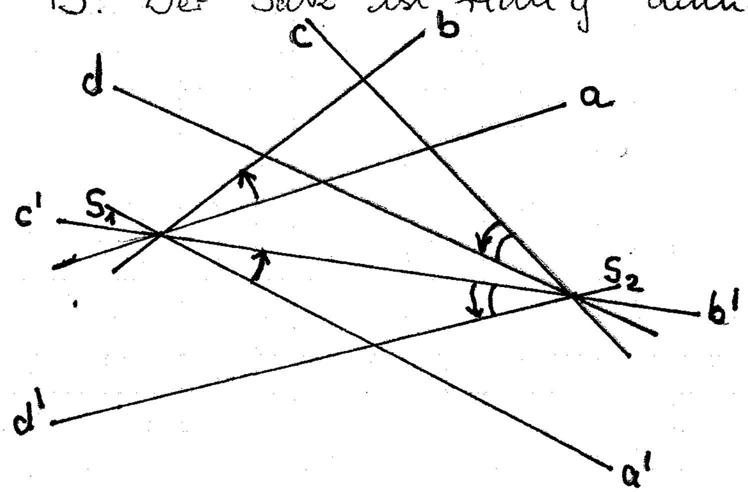
Aufgabe 4

a) Nach 4 Geradenspiegelungen ist der Drehsinn einer Bild-Figur gleich dem Drehsinn der Ausgangsfigur.
Nach einer ungeraden Anzahl von Drehungen ist der Drehsinn der Bildfigur umgekehrt zu dem der Ausgangsfigur

A: Der Satz muss falsch sein, denn er widerspricht den obigen Regeln über den Drehsinn. $\frac{1}{2} + 1$

C: Der Satz muss falsch sein. (wie A) $\frac{1}{2} + 1$

B: Der Satz ist richtig denn:



S_a: Spiegelung an a, ...

$(S_d \circ S_c) \circ (S_b \circ S_a)$ Paare bilden 1

$= (S_{d'} \circ S_{c'}) \circ (S_{b'} \circ S_{a'})$ Dabei ist $b' = S_1S_2$ Verdrehen auf S_1S_2 1

und $c' = S_1S_2$ und die Winkel zwischen a' und b' so groß wie zwischen a u. b und c', d' wie c, d Winkel gleich 1

$= S_{d'} \circ (S_{c'} \circ S_{b'}) \circ S_{a'}$ da $S_{c'} \circ S_{b'} = id$ Ergebnis 1

$= S_{d'} \circ S_{a'}$

(5) Lösung:

a) allg. Spiegelmatrix:

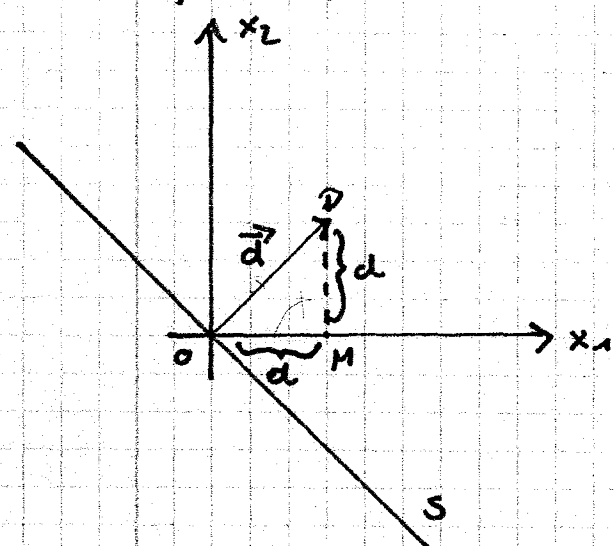
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{o.E. } \alpha \in [-180°, 180°]$$

1 Pkt.

$\Rightarrow \quad \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 45°$

$\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{-45°}} = 135°$

b) Skizze:



Beh: $\vec{d} \perp s$

Bew: 1) s = 2. Winkelhalb.

$\vec{d}$ liegt auf 1. Winkelhalb.

$\Rightarrow \vec{d} \perp s$

2) $|\sphericalangle MOD| = 45°$, denn

ΔOMD gleichschenklig und

$|\sphericalangle OMD| = 90°$.

$45° + 45° = 90°$

3 Pkte

(1 Skizze + 2 Bew.)

c) Bch: Abb. involutorisch

Bew: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$

1. Pkt. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -d \\ -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} = \vec{x}$

$\Rightarrow$ Bch. ☐

d) Verschiebung entspricht 2 Spiegelungen an parallelen Achsen g und h

Da $\vec{d} \perp s$ (Bezug zu b))

$\Rightarrow s \parallel g$ und $s \parallel h$.

3 Spiegelungen an parallelen Achsen

3. Pkt. entsprechen 1 Spiegelung.

1 Spiegelung ist involutorisch.

(1 Bezug zu b),

1 3 parallele Achsen

1 Ersetzung durch 1 Spg. und Folgerung)

Aufg 6.

a) D_0

S_H D_{90}

b) D_{90}

S_+ D_{180}

c) S_-

D_{270} D_{90}

d) S_+

D_0 S_v

e) D_{180}

S_v D_{90}

je richtige Abb. $\frac{1}{2}$

7. Es gibt 6 Abbildungen:

D_0, D_{120}, D_{240}, S_A, S_B, S_C 1

1.↓ \ 2.→	D_0	D_{120}	D_{240}	S_A	S_B	S_C
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_A	S_B	S_C
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_B	S_C	S_A
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	D_0	D_{240}	D_{120}
S_B	S_B	S_A	S_C	D_{120}	D_0	D_{240}
S_C	S_C	S_B	S_A	D_{240}	D_{120}	D_0

Punkte

1	2
2	1