Blatt 12 : Iteration und Chaos

$f_a(x) = ax(1-x)$, $a \in [0,4]$

1.) Fixpunktberechnung:

es muss gelten $f_a(x) \stackrel{!}{=} x$

$$ax(1-x) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad ax - ax^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(a - ax - 1) = 0$$

also $x_1 = 0$ oder

$$a - ax - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax = a - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a-1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{a}$$

Die beiden Fixpunkte lauten

$\underline{\underline{F_1(0/0)}}$ und $\underline{\underline{F_2\left(1-\frac{1}{a} / 1-\frac{1}{a}\right)}}$

2.) 1. Ableitung von $f_a(x)$

$$f_a'(x) = a(1-x) + ax(-1)$$

$$f_a'(x) = a - ax - ax$$

$$f_a'(x) = a - 2ax$$

3.) F_1 ist ein attraktiver Fixpunkt, wenn für den Betrag der ersten Ableitung gilt $|f_a'(x_1)| < 1$

$f_a'(0) = a$, also muss für a gelten $-1 < a < 1$

da $a \in [0,4]$ nach Vor., gilt also

F_1 ist attraktiv $\Leftrightarrow$ $a \in [0,1)$

4.) F_2 attraktiver Fixpunkt, wenn gilt $|f_a'(x_2)| < 1$

$$f_a'(1-\tfrac{1}{a}) = a - 2a(1-\tfrac{1}{a})$$
$$= a - 2a + 2$$
$$= 2 - a$$

also muss gelten $-1 < 2 - a < 1$

$2 - a < 1 \iff a > +1$

$2 - a > -1 \iff a < 3$

also ist F_2 attraktiv, wenn $a \in (1,3)$

5.) 2. Iterierte zu f_a

$$f_a^2(x) = f_a(f_a(x)) = f_a(ax(1-x))$$
$$= a(ax(1-x))(1-(ax(1-x)))$$
$$= a^2x(1-x)(ax^2 - ax + 1)$$

6.) Nullstellen der 2. Iterierten

$$f_a^{(2)}(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$a^2x(1-x)(ax^2-ax+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 0}},\ \underline{\underline{x_2 = 1}}$

bleibt noch der Term $ax^2 - ax + 1 = 0$

$$\iff x^2 - x + \frac{1}{a} = 0 \quad | \text{ p.-q Formel}$$

$$x_{3/4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{a-4}{4a}}}}$$

7) Behauptung: $F_1(0/0)$ und $F_2(1-\frac{1}{a}/1-\frac{1}{a})$ sind Fixpunkte von $f_a^{(2)}(x)$.

$f_a^{(2)}(0) = 0$, also ist $F_1(0/0)$ Fixpunkt von $f_a^{(2)}(x)$.

$$f_a^{(2)}(1-\tfrac{1}{a}) = a^2(1-\tfrac{1}{a})(1-1+\tfrac{1}{a})(a(1-\tfrac{1}{a})^2 - a(1-\tfrac{1}{a})+1)$$

$$= (a^2-a)\cdot\tfrac{1}{a}\cdot(a(1-\tfrac{2}{a}+\tfrac{1}{a^2}) - a + 1 + 1)$$

$$= (a-1)(a-2+\tfrac{1}{a}-a+2)$$

$$= (a-1)(\tfrac{1}{a})$$

$$= 1-\tfrac{1}{a} \qquad \Rightarrow \text{ auch } F_2(1-\tfrac{1}{a}/1-\tfrac{1}{a}) \text{ ist Fixpunkt.}$$

$\#$

Die 2. Iterierte führt immer 2 Iterationsschritte der ersten Iterierten auf einmal durch, damit müssen auch die Fixpunkte der ersten Iterierten Fixpunkte der 2. Iterierten sein.

9.) 1. Ableitung von $f_a^{(2)}(x) = a^2x(1-x)(ax^2-ax+1)$

$$= (a^2x - a^2x^2)(ax^2-ax+1)$$

$$f_a^{(2)\prime}(x) = (a^2-2a^2x)(ax^2-ax+1) + (a^2x-a^2x^2)(2ax-a)$$

$$= a^3x^2 - a^3x + a^2 - 2a^3x^3 + 2a^3x^2 - 2a^2x$$

$$+ 2a^3x^2 - a^3x - 2a^3x^3 + a^3x^2$$

$$= 6a^3x^2 - 4a^3x^3 - 2a^2x - 2a^3x + a^4$$

10.) $f_a^{(2)\prime}(x_3) = f_a^{(2)\prime}(x_4) = -a^2 + 2a + 4$

Bestimme Intervall für a, so dass F_3 und F_4 attraktive Fixpunkte sind, also $|f_a^{(2)\prime}(x_3)| < 1$

also muss gelten $-1 < -a^2 + 2a + 4 < 1$

$-a^2 + 2a + 4 < 1$

$\Leftrightarrow \; a^2 - 2a - 4 > -1$

$\Leftrightarrow \; a^2 - 2a - 3 > 0$

$\Rightarrow \; a_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$

$\underline{a_1 < -1}$

$\underline{a_2 > 3}$

$-a^2 + 2a + 4 > -1$

$\Leftrightarrow \; a^2 - 2a - 4 < 1$

$\Leftrightarrow \; a^2 - 2a - 5 < 0$

$\Rightarrow \; a_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1+5}$

$\underline{a_3 < 1 + \sqrt{6}}$ $\approx 3{,}4495$

$\underline{a_4 > 1 - \sqrt{6}}$ $\approx -1{,}4495$

Da $a \in [0,4]$ u. Vor., gilt also insgesamt

$\underline{\underline{a \in (3, 1+\sqrt{6})}}$, da $-1 < 0$ und $1-\sqrt{6} < 0$.

Zu den Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 2:

a) $$\sqrt{10} = 3 + (\sqrt{10} - 3)$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{10} - 3}}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{\sqrt{10} - 3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{10 - 9} = \frac{\sqrt{10} + 3}{1}$$

$$= 3 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3}$$

$$= 3 + \frac{1}{6 + (\sqrt{10} - 3)}$$

→ der gleiche Term wie am Anfang, also haben wir einen periodischen Kettenbruch.

$$= 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}$$

$$= [3; \overline{6}]$$

b) $$[1; 2, \overline{1, 3}] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}}$$

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Betrachten wir zunächst den periodischen Teil der Entwicklung

$$y = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\dots}}}}$$

also $y = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+y}}$ $\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{1}{\dfrac{3+y+1}{3+y}} = \dfrac{1}{\dfrac{4+y}{3+y}}$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{3+y}{4+y}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(4+y) = 3+y$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y + y^2 = 3+y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+3y-3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{12}{4}}$$

$$y = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

, da der negative Term nicht relevant ist.

Zurück zum eigentlichen Kettenbruch:

$$x-1 = \frac{1}{2+y} = \frac{1}{2+\frac{\sqrt{21}-3}{2}} = \frac{1}{\frac{4-3+\sqrt{21}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-1 = \frac{2}{1+\sqrt{21}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{21}+2}{1+\sqrt{21}} = \frac{3+\sqrt{21}}{1+\sqrt{21}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{(3+\sqrt{21})(1-\sqrt{21})}{(1+\sqrt{21})(1-\sqrt{21})} = \frac{3-3\sqrt{21}+\sqrt{21}-21}{1-21} = \frac{-18-2\sqrt{21}}{-20}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{9+\sqrt{21}}{10}}}$$