Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen
Dr. Reimund Albers Wintersemester 2008/09

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

12. Übung: Iteration und Chaos

Präsenzübungen für Mittwoch, 28.1.

Wir betrachten wieder die erste Iteration mit $f(x) = 4 - 2|x| = \begin{cases} 2x+4 & \text{für } x<0 \\ -2x+4 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Wir wollen nun das Bild eines ganzen Intervalls [a,b] betrachten.
Dabei ist $f\left(\left[a,b\right]\right) = \left\{ y \mid \exists x \in \left[a,b\right] : y = f(x) \right\}$.
Unterscheiden Sie die Fälle, dass für die Intervallgrenzen a, b gilt
$a,b < 0$ *oder* $a,b \geq 0$ *oder* $\left(a < 0 \text{ und } b \geq 0\right)$
Bestimmen Sie für alle drei Fälle die Länge des Bildintervalls in Abhängigkeit des Ausgangsintervalls. Was ist der größte und was der kleinste Fall für die Veränderung der Länge des Bildintervalls?
Erarbeiten Sie daraus eine Argumentation, dass jedes noch so kleine Intervall nach endlich vielen Iterationen mit f auf [-4,+4] abgebildet wird.

Hausübungen, Abgabe Montag, 2.2.2009

Hier geht es um Überlegungen zur Iteration mit $f_a(x) = ax(1-x)$ für allgemeines a. Alle Aussagen über a sollen grundsätzlich eingeschränkt werden auf das Intervall [0,4].

1. Berechnen Sie zu f_a die beiden Fixpunkte. Es sei F_1 der Punkt (0/0), F_2 der weitere Fixpunkt.
2. Berechnen Sie zu f_a die erste Ableitung f_a'.
3. Bestimmen Sie das Intervall für a, bei dem F_1 ein attraktiver Fixpunkt ist.
4. Bestimmen Sie das Intervall für a, bei dem F_2 ein attraktiver Fixpunkt ist.

5. Berechnen Sie die 2. Iterierte zu f_a.
   Lösung: $f_a^{(2)}(x) = f_a\left(f_a(x)\right) = a^2x(1-x)(ax^2 - ax + 1)$
6. Berechnen Sie die Nullstellen der 2. Iterierten.
7. Zeigen Sie, dass F_1 und F_2 auch Fixpunkte der 2. Iterierten sind. Geben Sie außer dem rein rechnerischen Nachweis eine allgemeine Begründung.
8. Berechnen Sie die weiteren beiden Fixpunkte F_3 und F_4 der 2. Iterierten.
   Lösung: $x_{3,4} = \dfrac{a+1}{2a} \pm \dfrac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}$
9. Berechnen Sie die erste Ableitung $f_a^{(2)}{}'$ der 2. Iterierten.
10. Setzt man die x-Koordinaten x_3 und x_4 der Fixpunkte F_3 und F_4 in die erste Ableitung $f_a^{(2)}{}'$ der 2. Iterierten ein, so erhält man $f_a^{(2)}{}'(x_3) = f_a^{(2)}{}'(x_4) = -a^2 + 2a + 4$ (*das sollten Sie nur nachrechen, wenn Sie viel Zeit haben oder sehr neugierig sind*). Bestimmen Sie das Intervall für a, in dem die Fixpunkte F_3 und F_4 attraktiv sind, d.h. die Ausgangsfunktion f_a einen stabilen Zweierzyklus hat.