Übung 11

1. Aufgabe:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x-3) & \text{für } x \leq 3 \\ 2(x-3) & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Definitionsbereich $= \mathbb{R}$

a) Berechnung der beiden Fixpunkte:

für $x \leq 3$: $\quad f(x) = -\frac{1}{3}(x-3) \overset{!}{=} x$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}(x-3) = x$

$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{4}{3}x$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{3}{4}}$

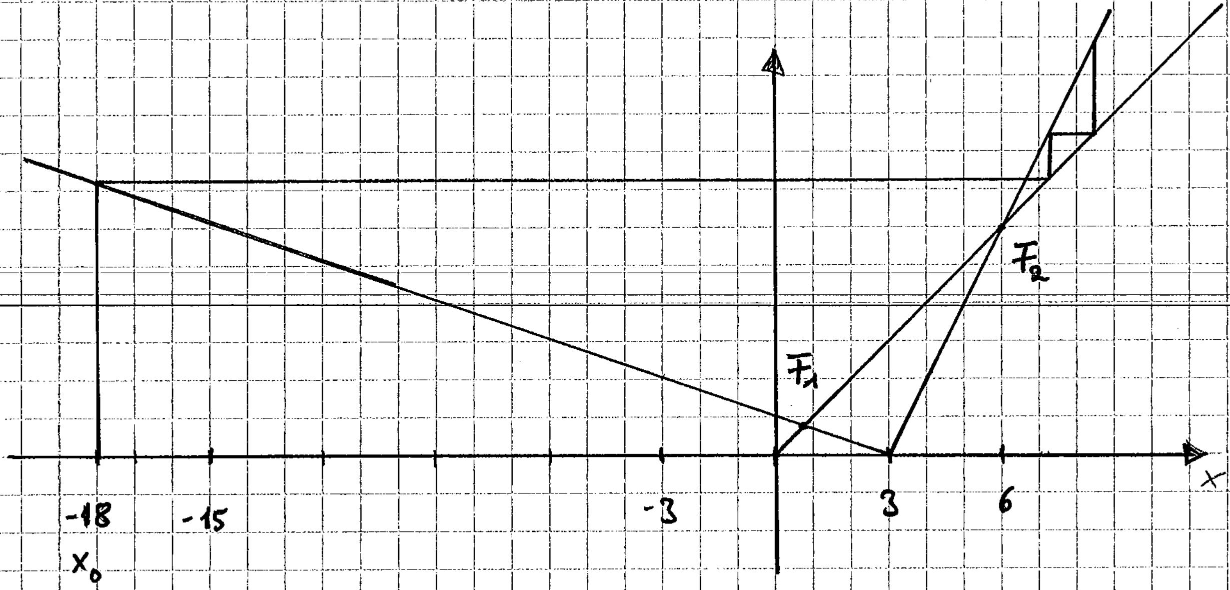
für $x > 3$: $\quad f(x) = 2(x-3) \overset{!}{=} x$

$\Leftrightarrow \quad x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x = 6}$

Damit lauten die Fixpunkte $F_1(\frac{3}{4} / \frac{3}{4})$ und $F_2(6/6)$

Für die Umgebung von F_1 gilt, dass die Steigung von $f(x)$ negativ und betragsmäßig kleiner 1 ist. Damit ist die Iteration hier spiralförmig und anziehend.
Im Bereich des zweiten Fixpunktes F_2 ist die Steigung $= 2$ und damit positiv und größer als 1, also ist die Iteration treppenförmig und abstoßend.



Für $x \in (-15, 6)$ läuft der Orbit der Iteration auf den attraktiven Fixpunkt F_1 zu.

Begründung / Erklärung:

- auf der rechten Seite wird das Intervall durch den repulsiven Fixpunkt F_2 beschränkt.
- Startwerte $x_0 \geq 6$ laufen ins Unendliche davon
- Startwerte $x_0 < 6$ werden vom Fixpunkt F_1 angezogen.

Bleibt die Frage nach der Begrenzung nach unten.

Da wir beim Iterieren an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten spiegeln, müssen wir aufpassen, dass unsere x-Werte, bzw. (an der Winkelhalbierenden spielt es keine Rolle) die y-Werte nicht größer als 6 werden.

Bestimme also alle x, für die gilt $f(x) < 6$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3) \overset{!}{<} 6$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}x + 1 < 6$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}x < 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -15$$

also gilt $x_0 \in (-15, 6)$ $\square$

2. Aufgabe: Heronverfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\omega}{x_n}\right) \quad , \; x_0 \in \mathbb{R}^+$$

a) $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\omega}{x}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{\omega}{2x}$$

$$= \frac{x^2 + \omega}{2x}$$

c) $\omega = 2 \; , \; x_0 = 1$

$$f(x_0) = \frac{1+2}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} = x_1$$

$$f(x_1) = \frac{\frac{9}{4}+2}{3} = \underline{\underline{\frac{17}{12}}} = x_2$$

$$f(x_2) = \left(\left(\frac{17}{12}\right)^2 + 2\right) \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{577}{408}}} = x_3$$

$$x_4 = \left(\left(\frac{577}{408}\right)^2 + 2\right) \cdot \left(\frac{408}{577 \cdot 2}\right) = \underline{\underline{\frac{665857}{470832}}}$$

d) $$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} + 1 - 2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

$$\vdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$= [1; \overline{2}]$$

e) Annäherung Kettenbruch $[1; \overline{2}]$

$$q_0 = 1 \quad , \quad q_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad q_2 = \frac{7}{5} \quad , \quad q_3 = \frac{17}{12}$$

$$q_4 = \frac{41}{29} \quad , \quad q_5 = \frac{99}{70} \quad , \quad q_6 = \frac{239}{169} \quad , \quad q_7 = \frac{577}{408}$$

f) Brüche aus dem Heronverfahren:

$$h_0 = 1 \quad , \quad h_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad h_2 = \frac{17}{12} \quad , \quad h_3 = \frac{577}{408}$$

Es fällt auf, dass sich das Heronverfahren schneller $\sqrt{2}$ annähert und dass einige der Brüche übereinstimmen.

$$h_0 = q_0 \quad , \quad h_1 = q_1 \quad , \quad h_2 = q_3 \quad , \quad h_3 = q_7$$

Damit lautet die Vermutung

$$h_n = q_{2^n - 1} .$$

schreibt man q_i als Kettenbruch auf, kann man die Regelmäßigkeit besser erkennen

$$h_0 = [1;]$$

$$h_1 = [1; \underbrace{2}_{1}]$$

$$h_2 = [1; \underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 2}_{2}]$$

$$h_3 = [1; \underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 2}_{2}, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4}]$$

$$h_4 = [1; \underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 2}_{2}, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{8}]$$

g) Fixpunkt berechnen: es muss also gelten $f(x) = x$

$$\frac{x^2+\omega}{2x} \overset{!}{=} x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \omega = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\omega}$$

Betrachten wir nur positive reelle Zahlen, bleibt als Fixpunkt $\sqrt{\omega}$.

h) $$f(x) = \frac{x^2+\omega}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\omega}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2x^2}$$

$$f'(\sqrt{\omega}) = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\omega}}{2\cdot\cancel{\omega}} = 0$$

Die Steigung der Tangente im Fixpunkt ist 0 und damit betragsmäßig kleiner 1, also attraktiv.
In diesem Fall sogar super attraktiv ($\Leftrightarrow$ Tangente $= 0$).

i) Das Heronverfahren ist so ein schnelles Verfahren, da der Fixpunkt, der die gesuchte Lösung ist, ein super attraktiver Fixpunkt ist und damit die Iterationswerte schnell konvergieren.

Betrachten wir nun die Darstellung der Quadratwurzel

$$\omega = a \cdot b \qquad \text{bzw} \qquad \omega = x \cdot x$$

löst man dies nach a oder b auf, erhalten wir $a = \frac{\omega}{b}$
Damit ist $\frac{1}{2}\left(a + \frac{\omega}{b}\right)$ der Mittelwert dieser beiden Werte, und somit haben wir ein Verfahren, dass uns die Quadratwurzel liefert.

j) $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\omega}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+\omega}{x^2}\right)$

~~g~~ k) Fixpunkt berechnen: $h(x) \overset{!}{=} x$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+\omega}{x^2}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + \omega = 2x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\omega}$$

Der Fixpunkt ist also $(\sqrt[3]{\omega} / \sqrt[3]{\omega})$

l) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{x^3}$

$$f'(\sqrt[3]{\omega}) = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \quad \in [-1, 1]$$

Der Fixpunkt ist also attraktiv, aber nicht super attraktiv.

m) ähnlich wie bei der Berechnung der Quadratwurzel wird hier zwischen zwei Werten gemittelt

$$a \cdot b = \omega \quad \text{mit} \quad \sqrt[3]{\omega} \cdot (\sqrt[3]{\omega})^2 = \omega$$

wobei ein Term davon einen quadratischen Ausdruck enthält und damit eine andere Gewichtung entsteht.
Um also ein schnelleres Verfahren mit einem attraktiven Fixpunkt zu erhalten, müssten wir die Gewichtung ändern.
Schreiben wir dazu die Iterationsvorschrift allgemeiner hin

$a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \cdot x + b \cdot \frac{\omega}{x^2} \overset{!}{=} x \quad$ da wir den Fixpunkt betrachten

$$\Leftrightarrow \quad a x^3 + b\omega = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-1)x^3 = -b\omega$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{b\omega}{1-a}}$$

Da der Fixpunkt uns die 3. Wurzel liefern soll, muss gelten

$$\sqrt[3]{\frac{b\omega}{1-a}} = \sqrt[3]{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = 1 - a}$$

Für einen super attraktiven Fixpunkt benötigen wir jetzt noch, dass die Tangentensteigung im Fixpunkt $= 0$ ist, also

$$h(x) = ax + b\frac{\omega}{x^2} \quad , \quad h'(x) = a - \frac{2b\omega}{x^3}$$

$$h'(\sqrt[3]{\omega}) = a - \frac{2b\omega}{\omega} = a - 2b \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{a = 2b}$$

Aus diesen beiden ~~Gle~~ Bedingungen können wir jetzt die Gewichtungen bestimmen, z.B.

$$a = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{3} \qquad \left(\text{damit gilt } a = 2b \text{ und } b = 1 - a \right)$$

also $$\boxed{h(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{\omega}{x^3}\right)}$$